Hans Walser, [20190929]

Kollineare Punkte

Idee und Anregung: Hartmut Müller-Sommer, Vechta

1 Standardfall

Auf der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ wählen wir zwei Punkte A und C (Abb. 1). Wir ergänzen die beiden Punkte zu einem achsenparallelen Rechteck $ABCD$.
Dann sind der Koordinatenursprung O und die beiden Punkte B und D kollinear.

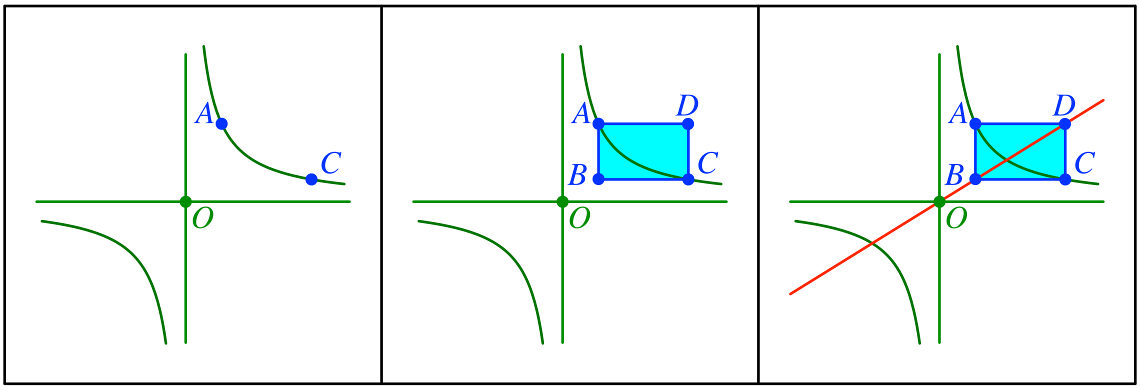

Abb. 1: Hyperbel und Rechteck

Beweis: Für A und C setzen wir die Koordinaten:

$$A\left(a, \tfrac{1}{a}\right), \quad C\left(c, \tfrac{1}{c}\right) \tag{1}$$

Damit ergeben sich für B und D die Koordinaten:

$$B\left(a, \tfrac{1}{c}\right), \quad D\left(c, \tfrac{1}{a}\right) \tag{2}$$

Wegen

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & c \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}\right) = 0 \tag{3}$$

sind die beiden Ortsvektoren von O zu B beziehungsweise zu D linear abhängig. Damit ist die Kollinearität nachgewiesen.
Die Kollinearität ergibt sich auch, wenn die beiden Startpunkte auf verschiedenen Ästen der Hyperbel liegen (Abb. 2).

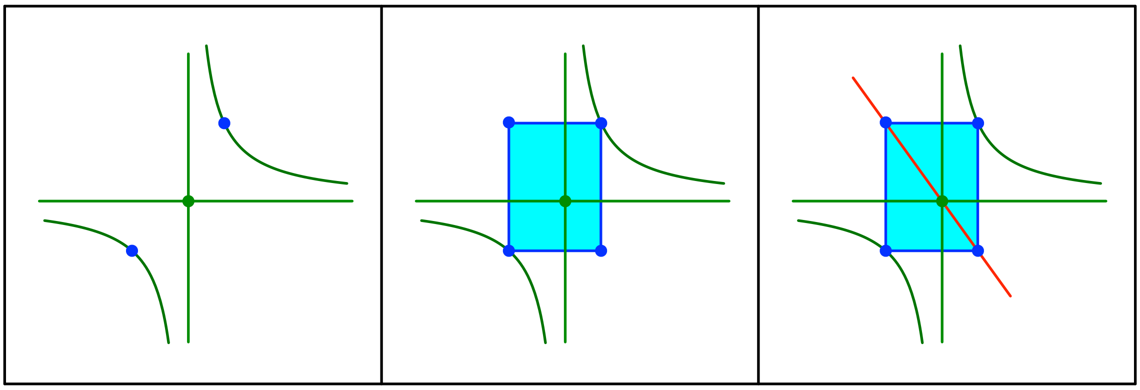

Abb. 2: Punkte auf verschiedenen Hyperbelästen

2 Allgemeine Hyperbel

Wir können den Sachverhalt verallgemeinern auf eine beliebige Hyperbel. Das Rechteck muss ersetzt werden durch ein asymptotenparalleles Parallelogramm und der Koordinatenursprung durch den Schnittpunkt der Asymptoten (Abb. 3). Der allgemeine Fall kann nämlich affin auf den Standardfall abgebildet werden.

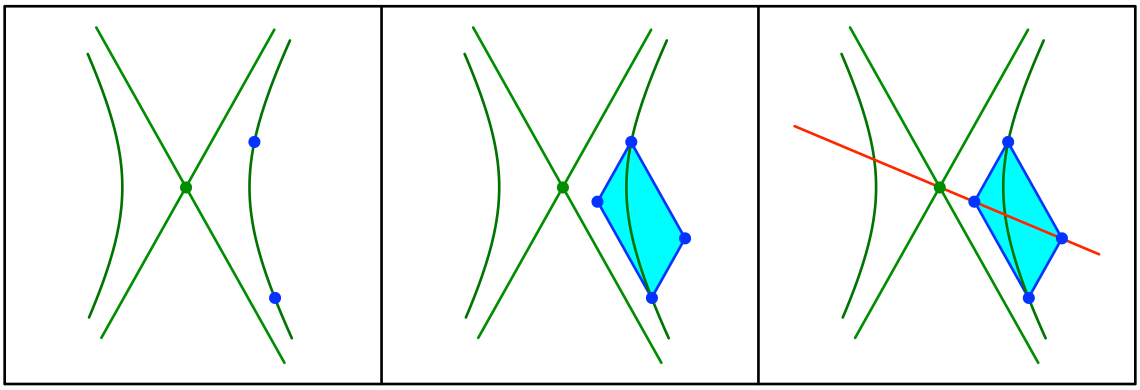

Abb. 3: Allgemeine Hyperbel

Auch im allgemeinen Fall dürfen die beiden Startpunkte auf verschiedenen Hyperbelästen liegen (Abb. 4).

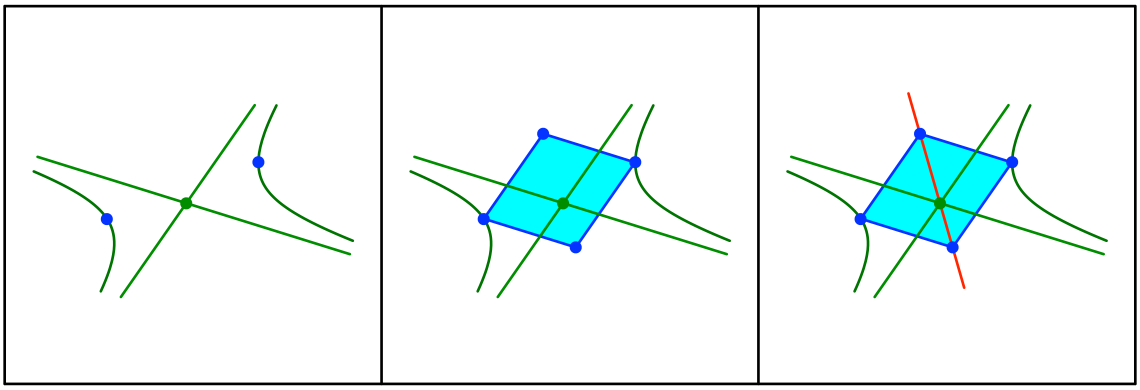

Abb. 4: Startpunkte auf verschiedenen Hyperbelästen

Website

Hans Walser: Schlussgeraden 137 bis 140
http://www.walser-h-m.ch/hans/Schlussstriche/Geraden_101-200_int.htm