Hans Walser, [20200713]

Kettenwurzeln

1 Worum geht es?

Kettenwurzeln im trigonometrischen Kontext des Winkelhalbierens

2 Die Beispiele

2.1 Rechter Winkel

Winkel	Kosinus
$\frac{1}{2}\pi$	0
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$\frac{1}{16}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$\frac{1}{32}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
$\frac{1}{64}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

Tab. 1

2.2 60°-Winkel

Winkel	Kosinus
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$
$\frac{1}{24}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}$
$\frac{1}{48}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}$
$\frac{1}{96}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}}$
$\frac{1}{192}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}}}$

Tab. 2

2.3 72°-Winkel

Winkel	Kosinus
$\frac{2}{5}\pi$	$-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$
$\frac{1}{5}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}$
$\frac{1}{10}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$\frac{1}{20}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$\frac{1}{40}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$
$\frac{1}{80}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}}$
$\frac{1}{160}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}}}$

Tab. 3

Der 72°-Winkel spielt in der Geometrie des regelmäßigen Fünfecks und damit beim Goldenen Schnitt eine zentrale Rolle (Walser 2013a).

3 Hintergrund

Aus dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha) = \cos\left(\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) - 1 \tag{1}$$

ergibt sich:

$$\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos(\alpha)} \tag{2}$$

Daraus folgt durch Iteration:

$$\cos\left(\tfrac{\alpha}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos(\alpha)}} \tag{3}$$

und weiter

$$\cos\left(\tfrac{\alpha}{8}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\left(\tfrac{\alpha}{4}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos(\alpha)}}} \tag{4}$$

Wir sehen die Entwicklung der Kettenwurzel.
Die Tabelle 4 gibt die ersten Formeln.

Winkel	Kosinus
α	$\cos(\alpha)$
$\frac{1}{2}\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos(\alpha)}$
$\frac{1}{4}\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(\alpha)}}$
$\frac{1}{8}\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(\alpha)}}}$
$\frac{1}{16}\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(\alpha)}}}}$
$\frac{1}{32}\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(\alpha)}}}}}$

Tab. 4: Fortlaufendes Winkelhalbieren

Wenn sich nun $\cos(\alpha)$ durch eine schöne Winkelformel oder durch eine rationale Zahl ausdrücken lässt, ergibt sich beim fortlaufenden Halbieren des Winkels eine Kettenwurzelformel.

4 Weitere Beispiele

4.1 Der kristallografische Winkel

Der Winkel

$$\gamma = \arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) \approx 70.528779365509309° \tag{5}$$

erscheint an verschiedenen Orten in der Kristallographie und der Geometrie. Er ist der Diederwinkel des regelmäßigen Tetraeders. Er ist auch der Schnittwinkel der beiden Diagonalen im DIN-Rechteck (Walser 2013b).

Die Tabelle 5 zeigt die zugehörigen Kettenwurzeln.

Winkel	Kosinus
γ	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}\gamma$	$\frac{1}{3}\sqrt{6}$
$\frac{1}{4}\gamma$	$\frac{1}{6}\sqrt{18+6\sqrt{6}}$
$\frac{1}{8}\gamma$	$\frac{1}{6}\sqrt{18+3\sqrt{18+6\sqrt{6}}}$
$\frac{1}{16}\gamma$	$\frac{1}{6}\sqrt{18+3\sqrt{18+3\sqrt{18+6\sqrt{6}}}}$
$\frac{1}{32}\gamma$	$\frac{1}{6}\sqrt{18+3\sqrt{18+3\sqrt{18+3\sqrt{18+6\sqrt{6}}}}}$

Tab. 5: Halbieren des kristallografischen Winkels

4.2 Im Lehrerdreieck

Im rechtwinkligen Dreieck mit dem Seitenverhältnis $a{:}b{:}c = 3{:}4{:}5$ (Abb. 1) ist:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \tfrac{4}{5} \quad , \quad \alpha \approx 36.87° \\ \cos(\beta) &= \tfrac{3}{5} \quad , \quad \beta \approx 53.13° \end{aligned} \tag{6}$$

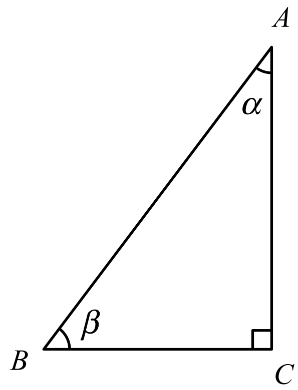

Abb. 1: Lehrerdreieck

Die Tabellen 6.1 und 6.2 zeigen die zugehörigen Kettenwurzeln.
Natürlich kann man bei allen pythagoreischen Dreiecken entsprechend vorgehen.

Winkel	Kosinus
α	$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{2}\alpha$	$\frac{3}{10}\sqrt{10}$
$\frac{1}{4}\alpha$	$\frac{1}{10}\sqrt{50+15\sqrt{10}}$
$\frac{1}{8}\alpha$	$\frac{1}{10}\sqrt{50+5\sqrt{50+15\sqrt{10}}}$
$\frac{1}{16}\alpha$	$\frac{1}{10}\sqrt{50+5\sqrt{50+5\sqrt{50+15\sqrt{10}}}}$
$\frac{1}{32}\alpha$	$\frac{1}{10}\sqrt{50+5\sqrt{50+5\sqrt{50+5\sqrt{50+15\sqrt{10}}}}}$

Tab. 6.1

Winkel	Kosinus
β	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$
$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{10}\sqrt{50+20\sqrt{5}}$
$\frac{1}{8}\beta$	$\frac{1}{10}\sqrt{50+5\sqrt{50+20\sqrt{5}}}$
$\frac{1}{16}\beta$	$\frac{1}{10}\sqrt{50+5\sqrt{50+5\sqrt{50+20\sqrt{5}}}}$
$\frac{1}{32}\beta$	$\frac{1}{10}\sqrt{50+5\sqrt{50+5\sqrt{50+5\sqrt{50+20\sqrt{5}}}}}$

Tab. 6.2

Literatur

Walser, H. (2013a): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, H. (2013b): *DIN A4 in Raum und Zeit*. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-69-1.