Hans Walser, [20180321b]

## Kegelstumpfaufgabe

Idee und Anregung: K. H., Gö.

### 1 Worum geht es?

Eine Kegelstumpf-Aufgabe mit Inkugel führt zum Goldenen Schnitt.

### 2 Die Aufgabe

Ein Kegelstumpf soll die Einheitskugel als Inkugel haben und das doppelte Volumen der Einheitskugel.

### 3 Bearbeitung

Die Abbildung 1 zeigt den Achsenschnitt mit Ergänzungen zum Kegel und den nötigen Bezeichnungen.

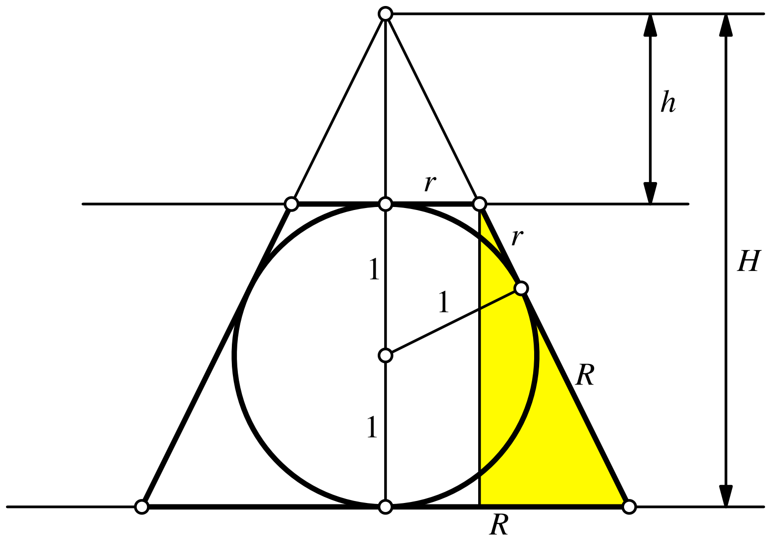


**Abb. 1: Disposition und Bezeichnungen**

Aus dem gelb markierten rechtwinkligen Dreieck ergibt sich:

$$(R+r)^2 = 2^2 + (R-r)^2 \quad \Rightarrow \quad Rr = 1 \tag{1}$$

Weiter ist:

$$H = R\tfrac{2}{R-r} \quad , \quad h = r\tfrac{2}{R-r} \tag{2}$$

Für das Kegelstumpfvolumen $V$ erhalten wir unter Verwendung von (2):

$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H - \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{2\pi}{3(R-r)}\left(R^3 - r^3\right) = \tfrac{2\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) \tag{3}$$

Einsetzen von (1) liefert:

$$V = \tfrac{2\pi}{3}\left(R^2 + 1 + \tfrac{1}{R^2}\right) \tag{4}$$

Dieses Volumen $V$ soll das Doppelte des Kugelvolumens $\tfrac{4}{3}\pi$ ausmachen. Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$R^2 + 1 + \tfrac{1}{R^2} = 4 \tag{5}$$

Die biquadratische Gleichung (5) hat die positive Lösung:

$$R = \Phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \tag{6}$$

Dabei ist $\Phi$ der sogenannte Goldene Schnitt (Walser 2013).
Wegen (1) wird:

$$r = \tfrac{1}{\Phi} \approx 0.618 \tag{7}$$

Die Abbildung 2 zeigt die Lösung.

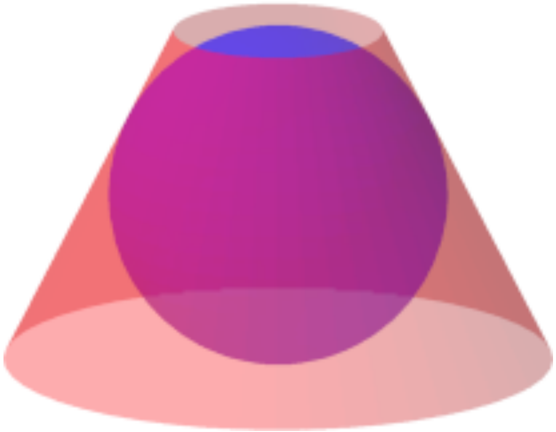

**Abb. 2: Kegelstumpf**

## Literatur

Walser, Hans (2013): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.