Hans Walser, [20210102]

Kardioide

1 Worum geht es?

Spielereien um die Kurvenschar:

$$c_n: \quad \vec{x}_n(t) = \begin{bmatrix} \cos^n(t)\cos(nt) \\ \cos^n(t)\sin(nt) \end{bmatrix}, \quad t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Viele Bilder

2 Einstieg

Für $n = 1$ ergibt sich der Kreis (rot in Abb. 1), für $n = 2$ die Kardioide (blau in Abb. 1).

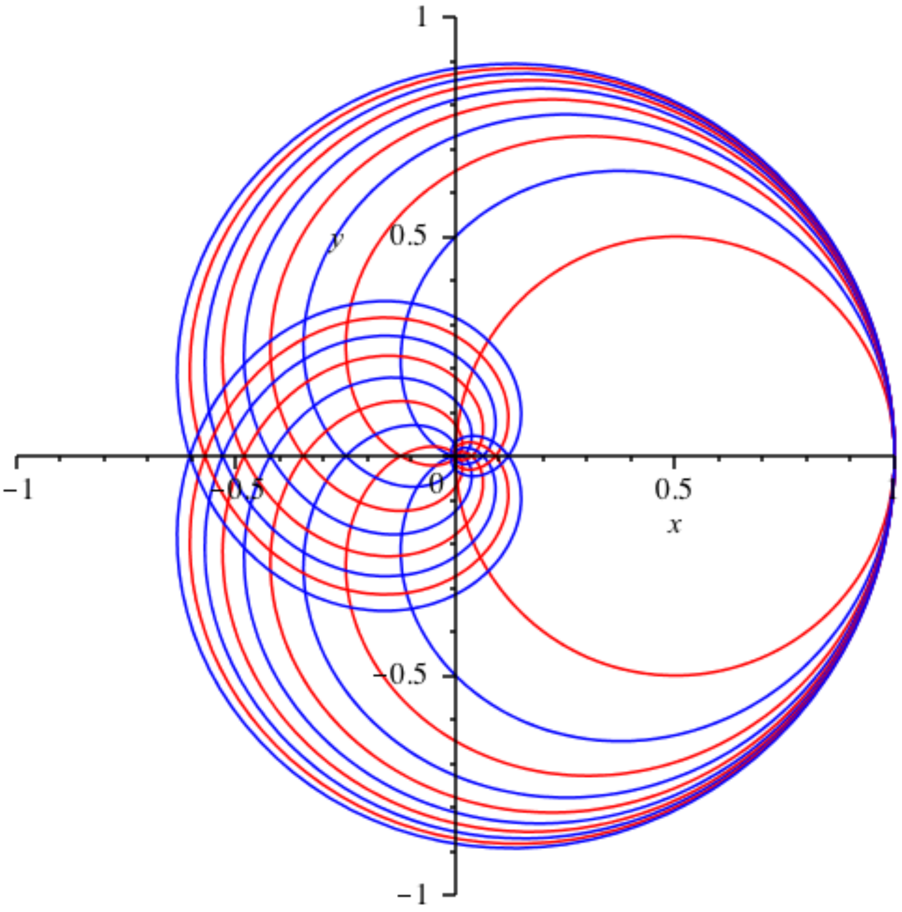

Abb. 1: Kurvenschar

Für größere Werte von n haben wir verallgemeinerte Kardioiden.

3 Ganzzahlige Indizes

Wir ersetzen $n \in \mathbb{N}$ durch $n \in \mathbb{Z}$. Wegen $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ müssen wir den Definitionsbereich etwas einschränken, um eine Division durch null zu vermeiden:

$$c_n: \quad \vec{x}_n(t) = \begin{bmatrix} \cos^n(t)\cos(nt) \\ \cos^n(t)\sin(nt) \end{bmatrix}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right], \varepsilon > 0, n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

Die Abbildung 2 zeigt die Kurven für $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Für $n = 0$ ergibt sich der Einheitspunkt auf der positiven x-Achse.
Für $n = -1$ erhalten wir die senkrechte Gerade $x = 0$.

Für $n = -2$ ergibt sich die liegende Parabel $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$.

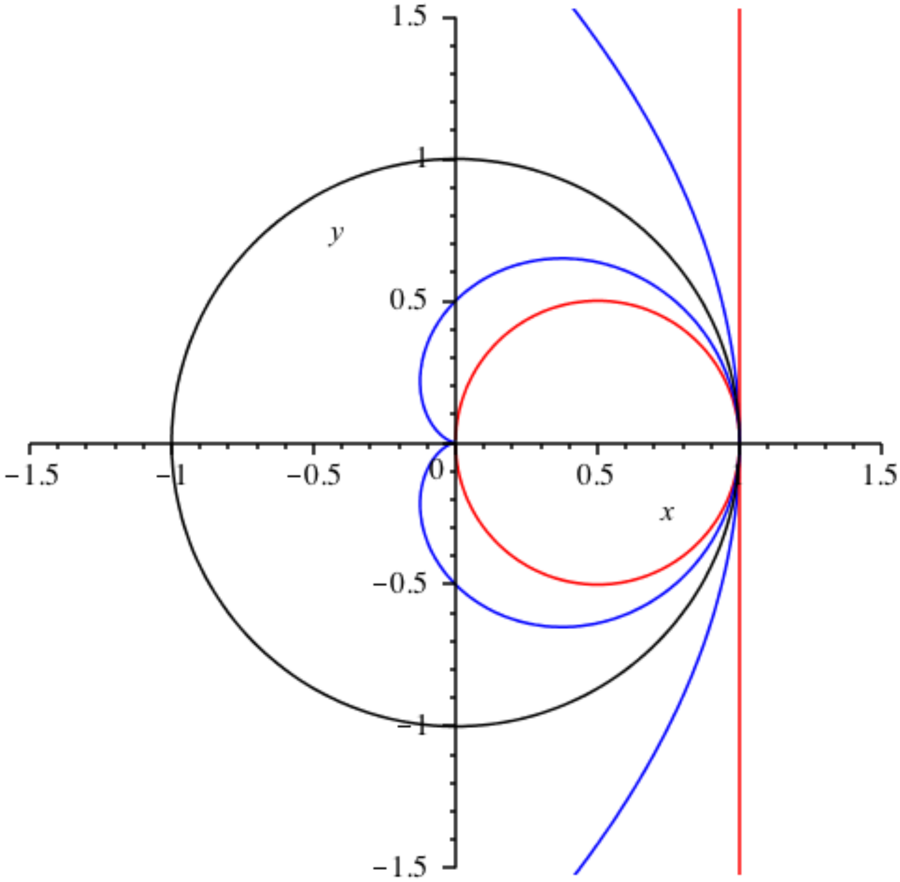

Abb. 2: Kreisspiegelung

Es sieht nun so aus, dass c_n und c_{-n} (sie haben jeweils dieselbe Farbe) durch eine Kreisspiegelung am Einheitskreis auseinander hervor gehen. Dies ist global gesehen richtig, punktweise gesehen kommt aber noch eine Spiegelung an der x-Achse dazu. Dies sehen wir, wenn wir den Definitionsbereich für t asymmetrisch wählen. Die Abbildung 3 zeigt die Kurvenschar:

$$c_n: \quad \vec{x}_n(t) = \begin{bmatrix} \cos^n(t)\cos(nt) \\ \cos^n(t)\sin(nt) \end{bmatrix}, \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right], \varepsilon = 0.01, n \in \{-5,..,5\} \tag{3}$$

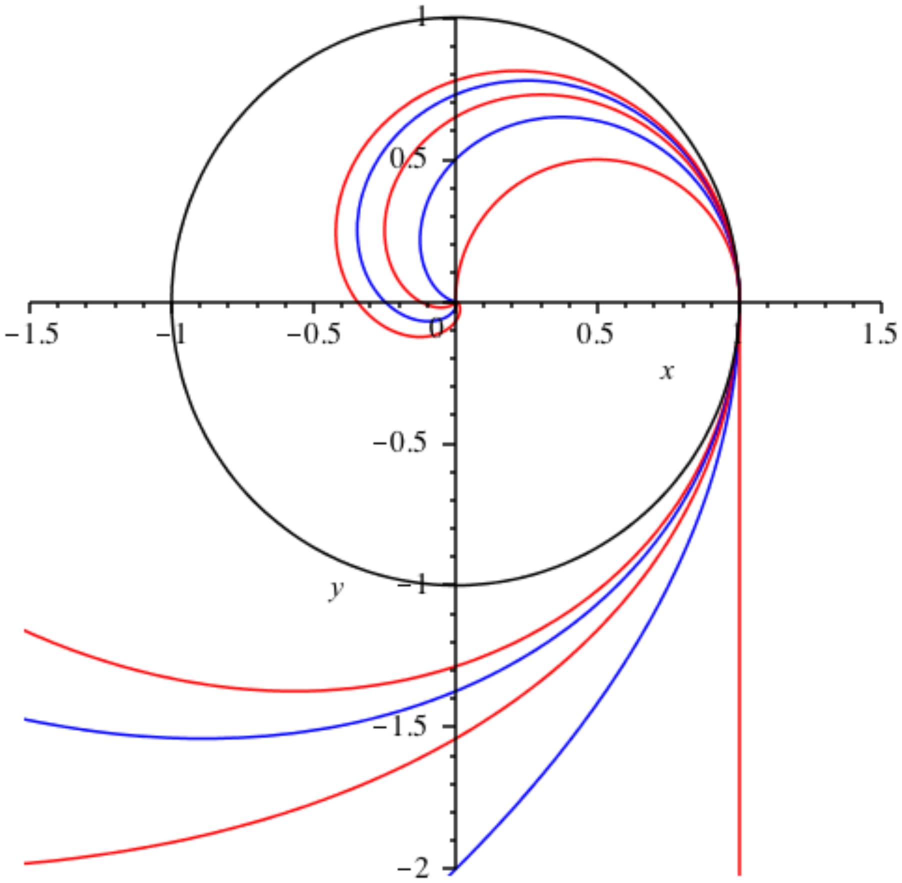

Abb. 3: Asymmetrie

Die Kurven mit entgegengesetzt gleichem Index gehen zwar glatt (ohne Richtungsänderung) ineinander über, haben aber an der Übergangsstelle einen Krümmungssprung.

Die Abbildung 4 zeigt die Variante:

$$c_n: \quad \vec{x}_n(t) = \begin{bmatrix} \cos^n(t)\cos(nt) \\ \cos^n(t)\sin(nt) \end{bmatrix}, \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right], \varepsilon = 0.3, n \in \{-25,..,25\} \tag{4}$$

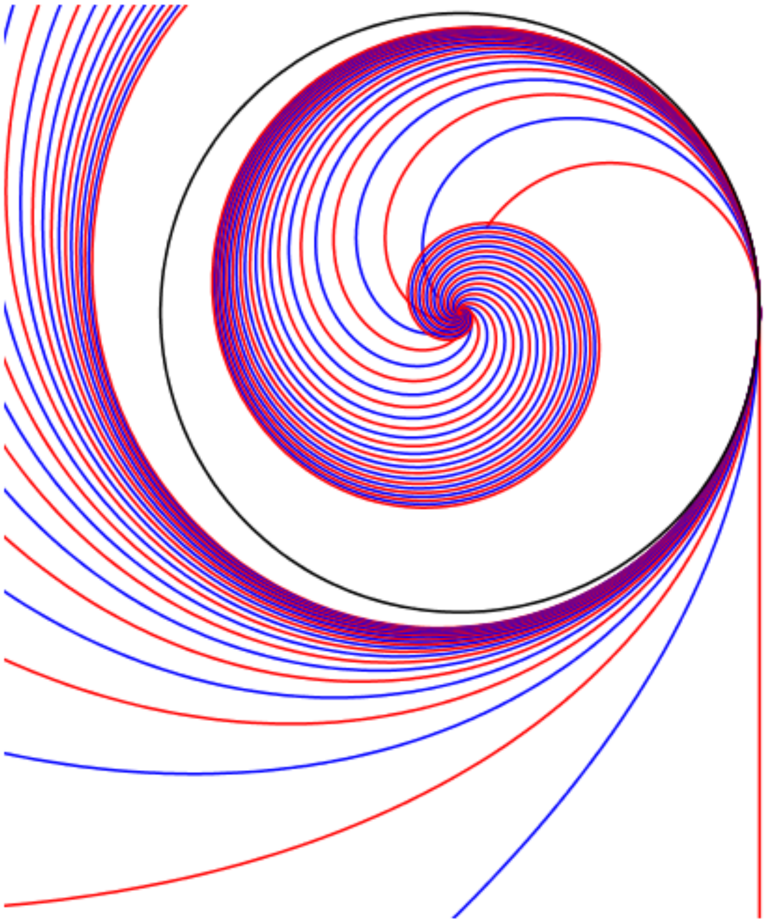

Abb. 4: Variante

4 Rationale Indizes

Die Sache funktioniert auch für rationale Indizes. Die Abbildung 5 zeigt die Situation für:

$$c_n: \quad \vec{x}_n(t) = \begin{bmatrix} \cos^n(t)\cos(nt) \\ \cos^n(t)\sin(nt) \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right], \varepsilon = 0.0001, \\ n \in \{-3.5, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5\} \end{cases} \tag{5}$$

Man beachte den Farbwechsel bei der Kreisspiegelung.

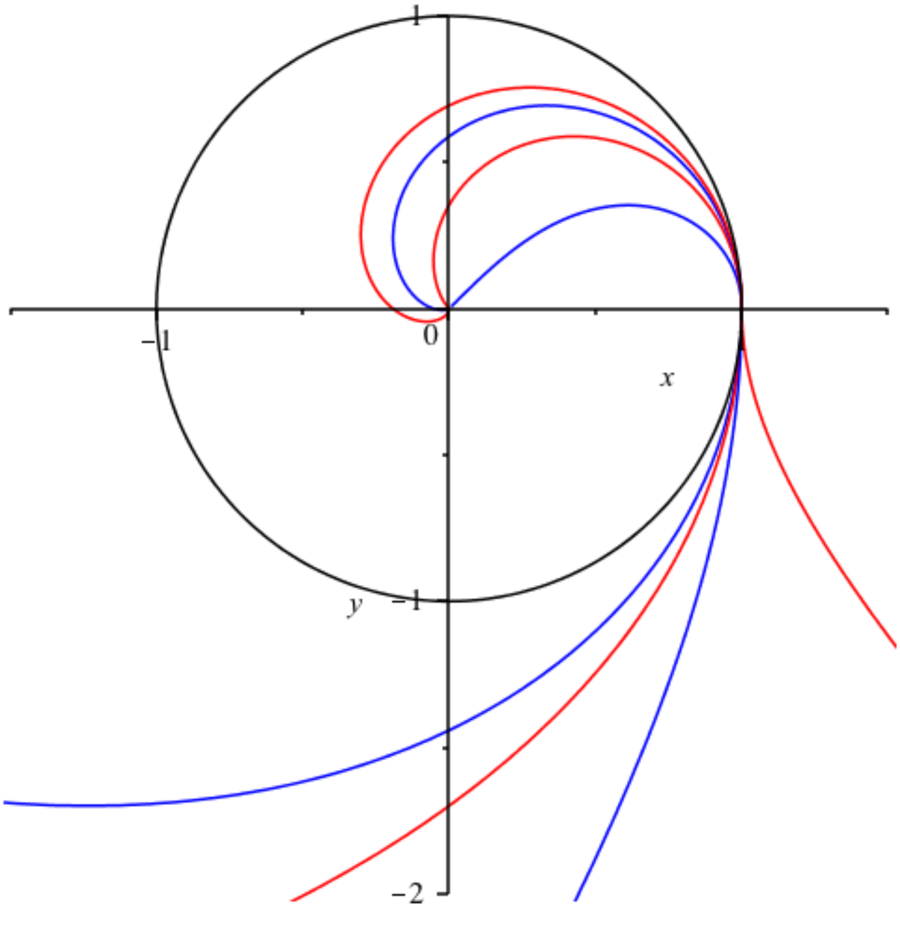

Abb. 5: Halbzahlige Indizes

5 Vertauschung

In (1) vertauschen wir die Rollen von n und t. Das sieht exemplarisch so aus:

$$d_n: \quad \vec{x}_n(t) = \begin{bmatrix} \cos^t\left(\frac{n}{10}\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t\frac{n}{10}\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos^t\left(\frac{n}{10}\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(t\frac{n}{10}\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad t \in [0,\infty], n \in \{1,\ldots,9\} \tag{6}$$

Die Kurvenschar besteht aus logarithmischen Spiralen (Abb. 6).

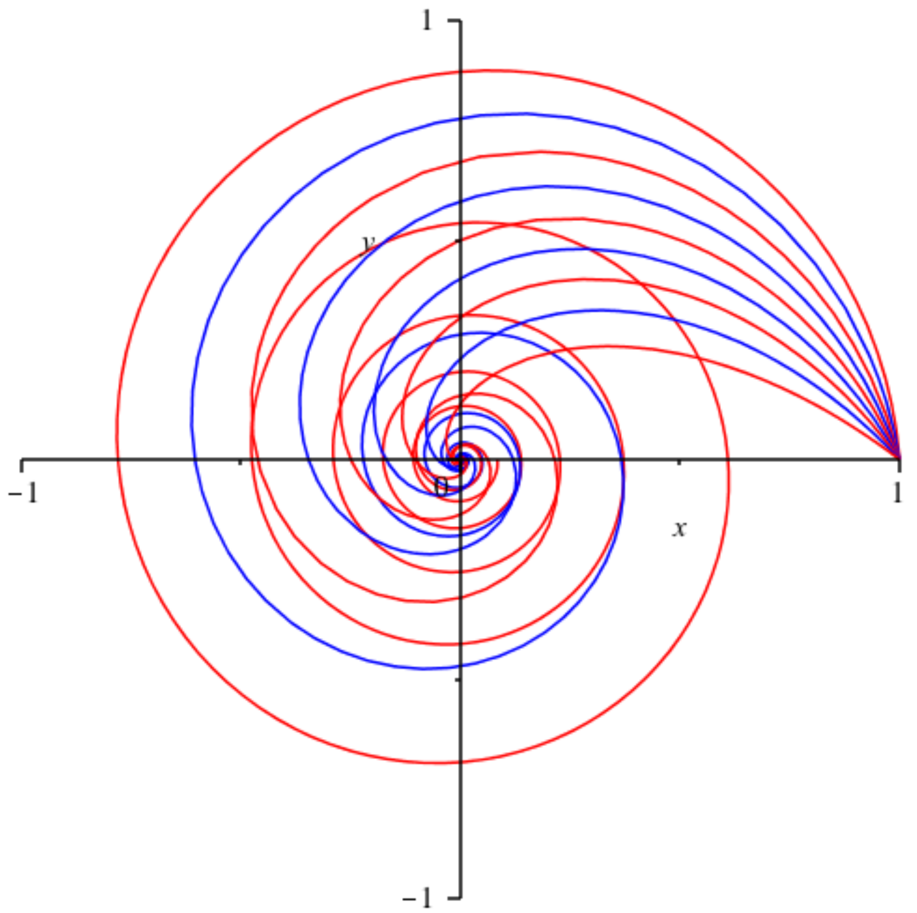

Abb. 6: Logarithmische Spiralen

6 Fläche im Raum

Aus (1) basteln wir eine Parameterdarstellung einer Fläche im Raum:

$$\Phi: \quad \vec{x}(u,v) = \begin{bmatrix} \cos^u(v)\cos(uv) \\ \cos^u(v)\sin(uv) \\ z(u,v) \end{bmatrix}, \quad u \in [a,b], v \in \left[-\tfrac{\pi}{2}+\varepsilon, \tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right], \varepsilon > 0 \qquad (7)$$

Die z-Koordinate ist noch frei wählbar.

Für $z = 0$ erhalten wir eine ebene Figur (Abb. 7 für $a = 0$ und $b = 2$).

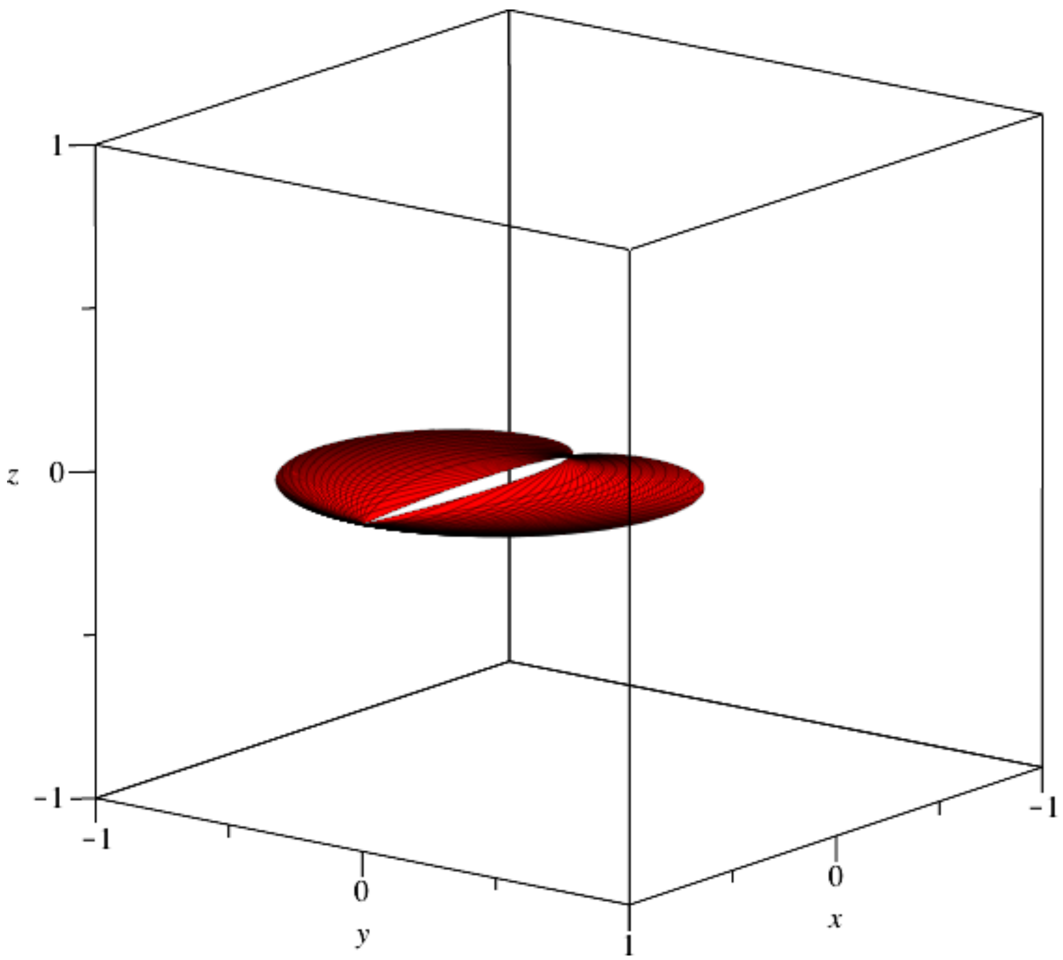

Abb. 7: Ebene Figur

Die Abbildung 8 zeigt die Sicht von oben (Grundriss). Der Umriss ist die Kardioide. Die u-Linien sind logarithmische Spiralen, die v-Linien verallgemeinerte Kardioiden.

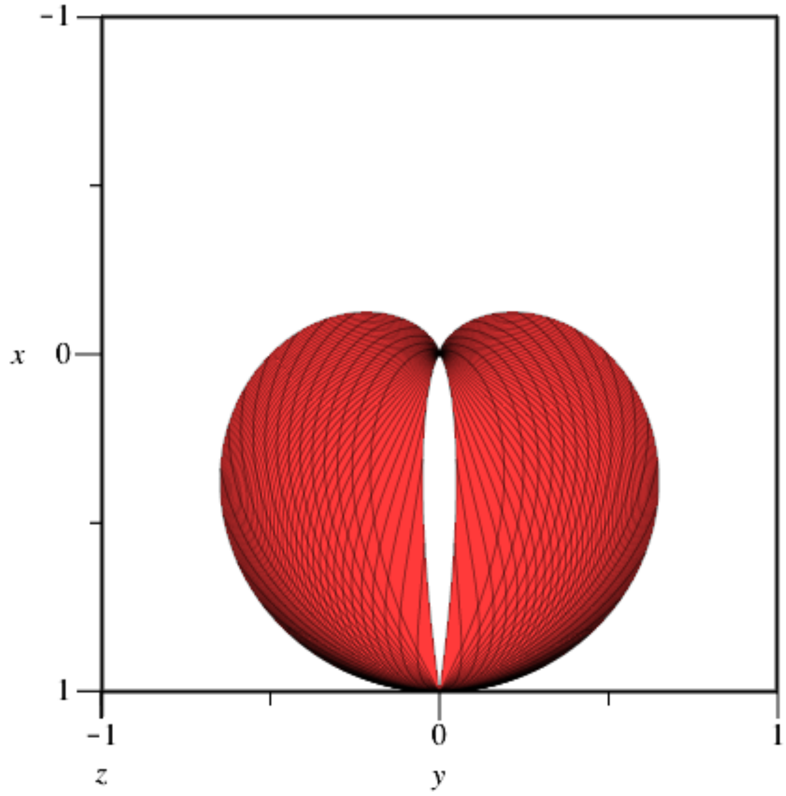

Abb. 8: Kardioide

Für $z = \frac{1}{2}u$ ergibt sich die Fläche der Abbildung 9. Die oberste Niveaulinie ist die Kardioide.

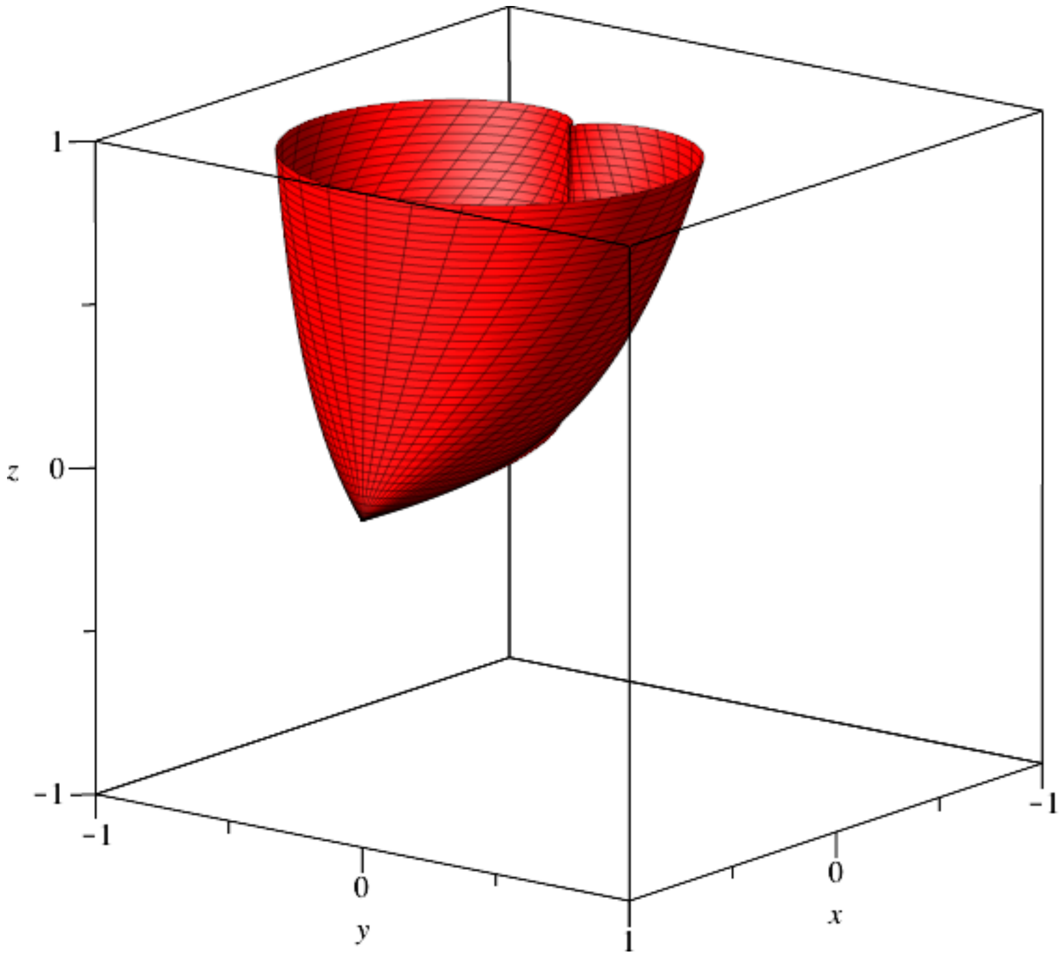

Abb. 9: Niveaulinien verallgemeinerte Kardioiden

Mit $z = \sin(v)$ erhalten wir die Fläche der Abbildung 10. Die Niveaulinien sind logarithmische Spiralen.

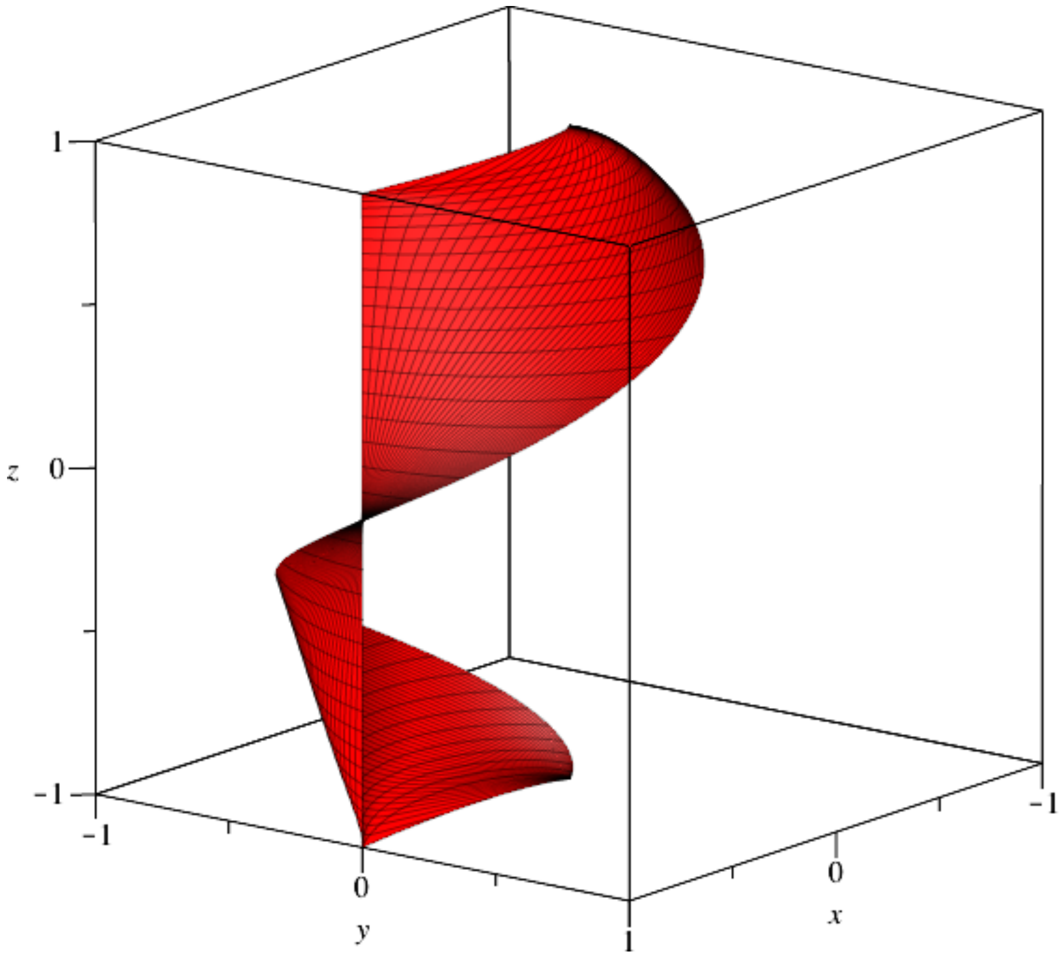

Abb. 10: Niveaulinien logarithmische Spiralen

Websites

Hans Walser: Kardioide
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kardioide5/Kardioide5.htm

Hans Walser: Kardioide als Spiegelbild der Parabel bei Kreisspiegelung
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kardioide2/Kardioide2.htm