

Hans Walser, [20200917]

Kardioide als Enveloppe

Anregung: G. Sch., Sch.

1 Worum geht es?

Die Kardioide ist Enveloppe von Mönchen des Hippokrates. Beweis.

2 Kardioide als Lotfußpunktkurve

In der folgenden Darstellung werden Punkte und ihre Ortsvektoren identifiziert.

Auf dem Einheitskreis wählen wir einen Punkt $Q = (\cos(t), \sin(t))$ (Abb. 1) und zeichnen die Kreistangente durch diesen Punkt.

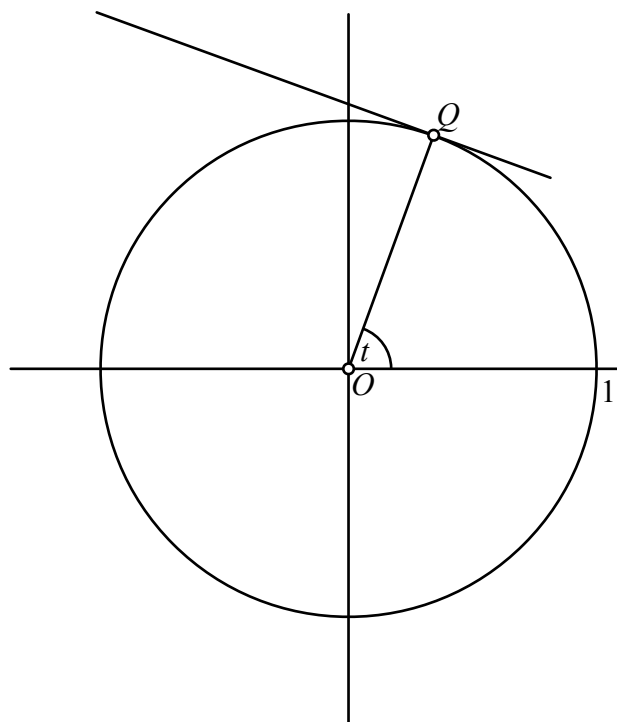


Abb. 1: Tangente

Vom Punkt $E = (-1,0)$ aus zeichnen wir das Lot auf die Tangente (Abb. 2). Der Schnittpunkt mit der Tangente, also der Lotfußpunkt, sei P . Wegen $|PQ| = \sin(t)$ ist:

$$P = Q + \sin(t) \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

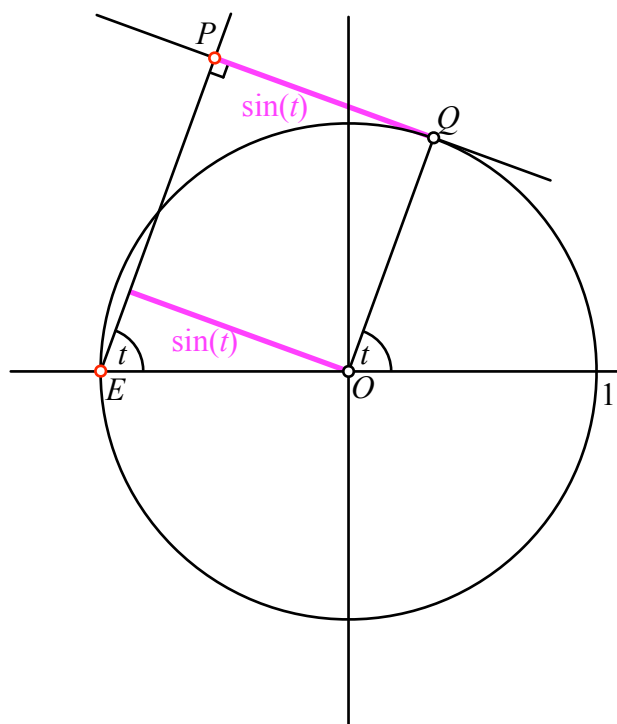


Abb. 2: Lotfußpunkt

Variation von $t \in [-\pi, \pi]$ führt zur Kardioide (Abb. 3).

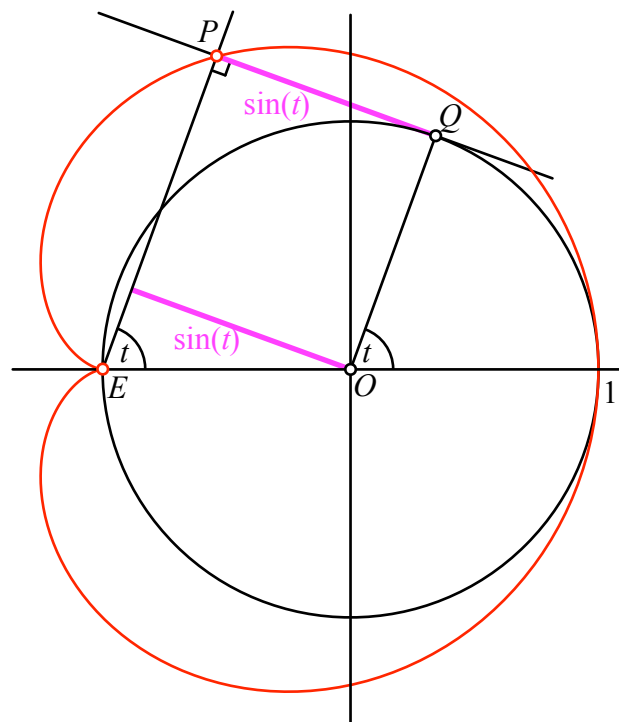


Abb. 3: Kardioide

Die Kardioide hat in P den Tangentialvektor:

$$\dot{P} = \frac{dP}{dt} = (-2 \cos(t) \sin(t) - \sin(t), -\sin(t)^2 + \cos(t)^2 + \cos(t)) \quad (2)$$

3 Thaleskreis

Der Thaleskreis über der Strecke EQ verläuft durch den Punkt P (Abb. 4). Der Thaleskreis hat den Mittelpunkt N :

$$N = \frac{1}{2}(E + Q) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t)\right) \quad (3)$$

Der Vektor

$$\overrightarrow{NP} = P - N = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t) + \sin(t)^2, -\frac{1}{2}\sin(t) - \cos(t)\sin(t)\right) \quad (4)$$

ist der Normalvektor zum Thaleskreis.

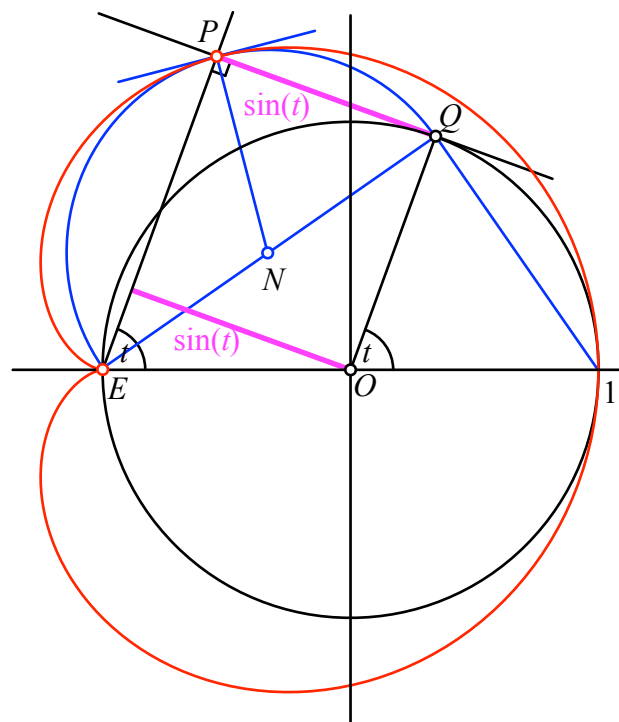


Abb. 4: Thaleskreis

4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt der Vektoren (2) (Tangentialvektor an die Kardioide in P) und (4) (Normalvektor des Thaleskreises in P) ist null. Daher berührt der Thaleskreis in P die Kardioide.

Der Thaleskreis ist Außenkreis eines Mändchens von Hippokrates (Abb. 5).

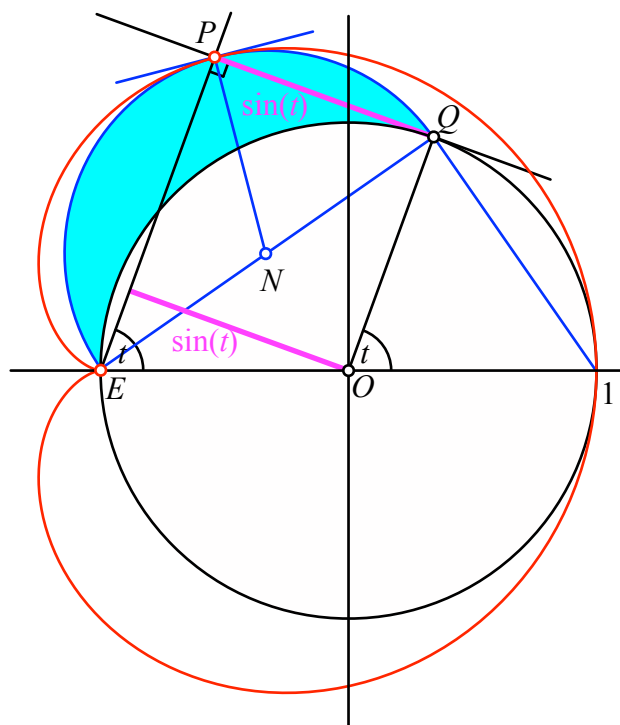


Abb. 5: Mändchen des Hippokrates

Weblinks

Hans Walser: Kardioide und regelmäßige Vielecke

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kardioide3/Kardioide3.htm>

Hans Walser: Al-Sijzi

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/A/Al-Sijzi/index.html>

Hans Walser: Die Herzkurve und die Mönchen des Hippokrates

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve_u_Hippokrates/Herzkurve_u_Hippokrates.htm

Hans Walser: Herzkurve als Enveloppe

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve3/Herzkurve3.htm>

Hans Walser: Kardioide als Spiegelbild der Parabel bei Kreisspiegelung

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kardioide2/Kardioide2.htm>

Hans Walser: Kardioide und Goldener Schnitt

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kardioide/Kardioide.htm>

Hans Walser: Umkreis bei regelmäßigen Vielecken

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/U/Umkreis/index.html>