Hans Walser, [20130506]

Kardioide als Spiegelbild der Parabel bei Kreisspiegelung

1 Die Parabel

Wir beschreiben die Parabel durch:

$$x = -\tfrac{1}{4} y^2 + 1$$

Es handelt sich um eine „liegende“ Parabel (Abb. 1). Der Ursprung ist der Brennpunkt.

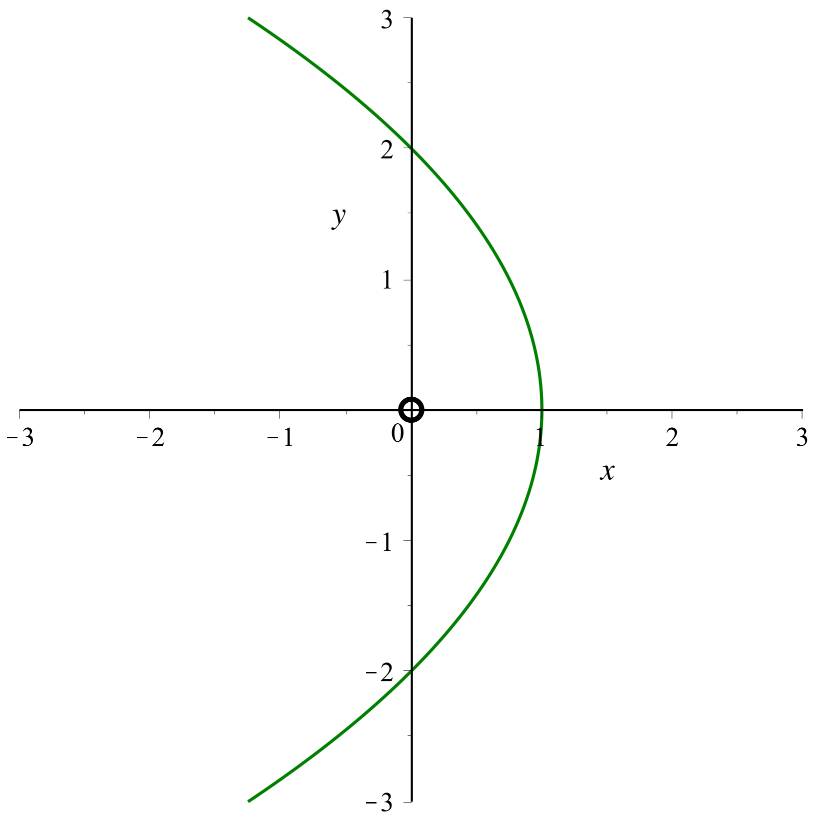

Abb. 1: Liegende Parabel

2 Spiegelung am Einheitskreis

Bei der Spiegelung am blauen Einheitskreis wird ein Punkt $P(x,y)$ auf den Punkt $\overline{P}(\overline{x},\overline{y})$ abgebildet. Die Abbildungsgleichungen sind:

$$\overline{x} = \tfrac{x}{x^2+y^2}, \quad \overline{y} = \tfrac{y}{x^2+y^2}$$

Die Punkte außerhalb des blauen Einheitskreises werden ins Innere abgebildet und umgekehrt, der Ursprung wird in den unendlich fernen Punkt abgebildet. Der Einheitskreis bleibt punktweise fix.

Die Abbildung 2 zeigt die grüne Parabel und ihr rotes Spiegelbild bei der Spiegelung am blauen Einheitskreis.

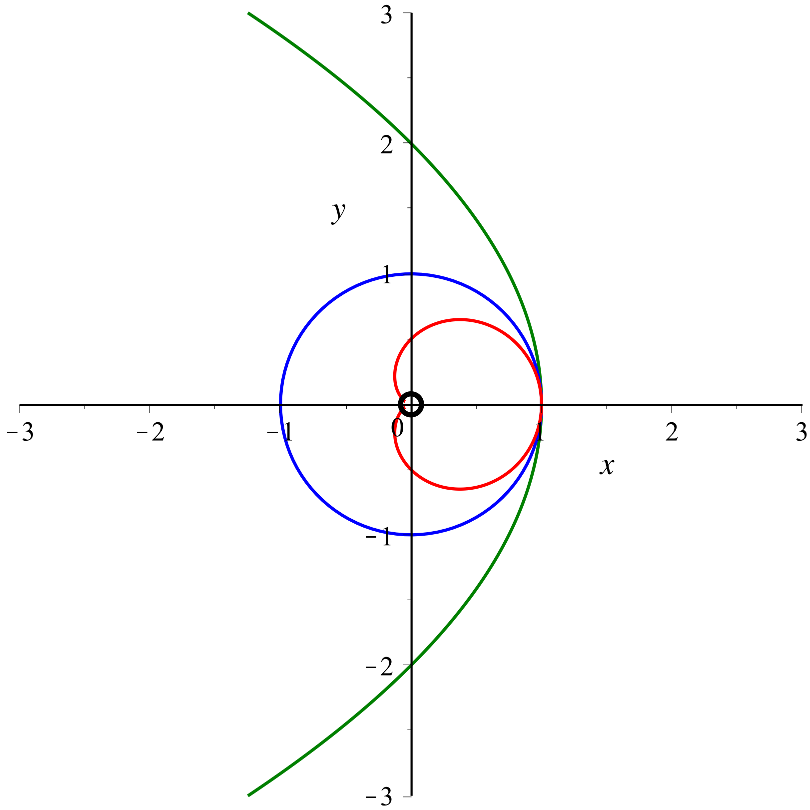

Abb. 2: Spiegelbild

Wir vermuten, dass das rote Spiegelbild der grünen Parabel die Kardioide ist.

3 Beweis

Wir beweisen umgekehrt, dass das Spiegelbild der Kardioide die Parabel ist. Für die Kardioide haben wir die Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}=\cos^2(t)\cos(2t)\\ \bar{y}=\cos^2(t)\sin(2t)\end{array}\right\}\quad t\in\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]$$

Die Abbildungsgleichungen der Rückspiegelung sind:

$$x=\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2},\quad y=\frac{\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}$$

Wegen

$$\bar{x}^2+\bar{y}^2=\left(\cos^2(t)\cos(2t)\right)^2+\left(\cos^2(t)\sin(2t)\right)^2=\cos^4(t)$$

erhalten wir:

$$x=\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=\frac{\cos(2t)}{\cos^2(t)},\quad y=\frac{\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=\frac{\sin(2t)}{\cos^2(t)}$$

Wir haben die Parabelgleichung $x=-\frac{1}{4}y^2-1$ zu verifizieren, also:

$$\frac{\cos(2t)}{\cos^2(t)} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sin(2t)}{\cos^2(t)}\right)^2 + 1$$

Dies kann leicht nachgerechnet werden.

4 Enveloppen

Die Parabel kann als Enveloppe ihrer Tangenten dargestellt werden (Abb. 3).

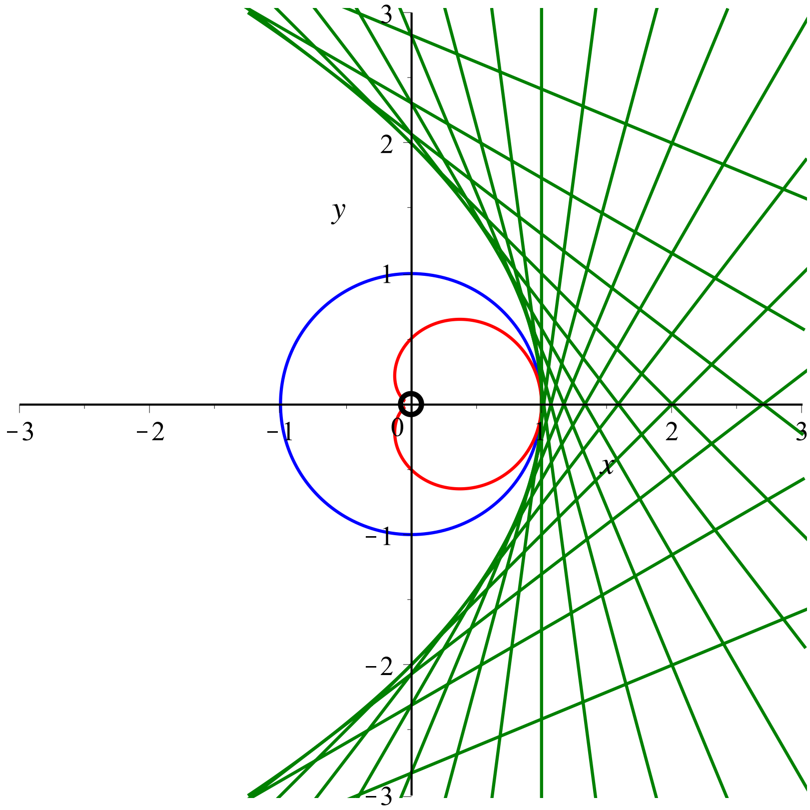

Abb. 3: Parabel als Enveloppe

Der Fußpunkt des Lotes vom Ursprung auf eine solche Tangente liegt auf der schwarzen Geraden $x = 1$ (Abb. 4). Diese schwarze Gerade ist die Scheiteltangente der Parabel.

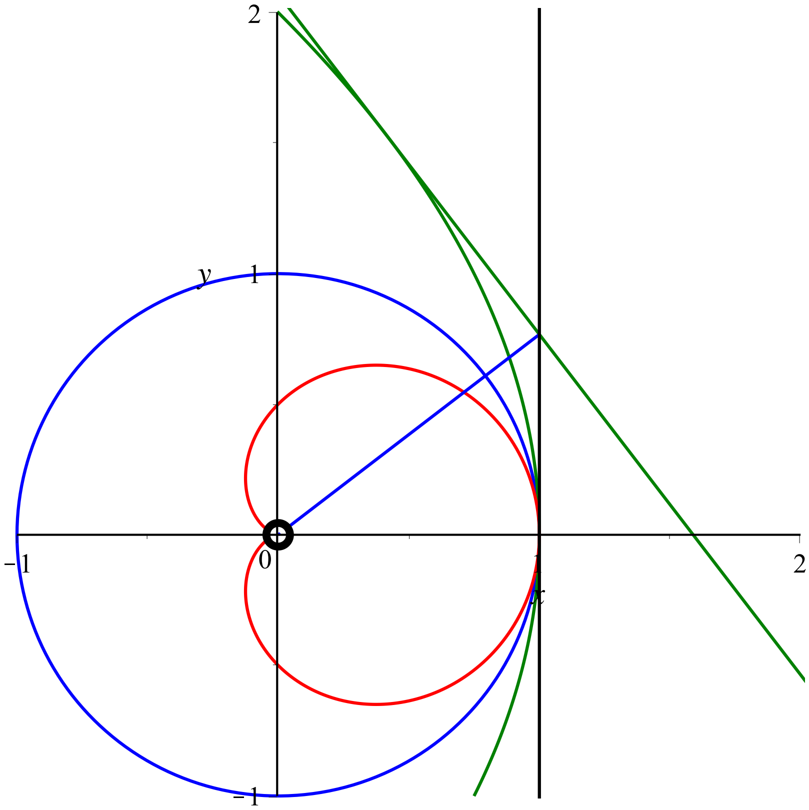

Abb. 4: Lotfußpunkt

Nun spiegeln wir die grüne Tangente und die schwarze Scheiteltangente am blauen Einheitskreis (Abb. 5). Beide werden zu Kreisen durch den Ursprung. Der rote Bildkreis der grünen Tangente ist Thaleskreis über der Strecke, welche durch den schwarzen Kreis aus dem Lot auf die grüne Tangente herausgeschnitten wird.

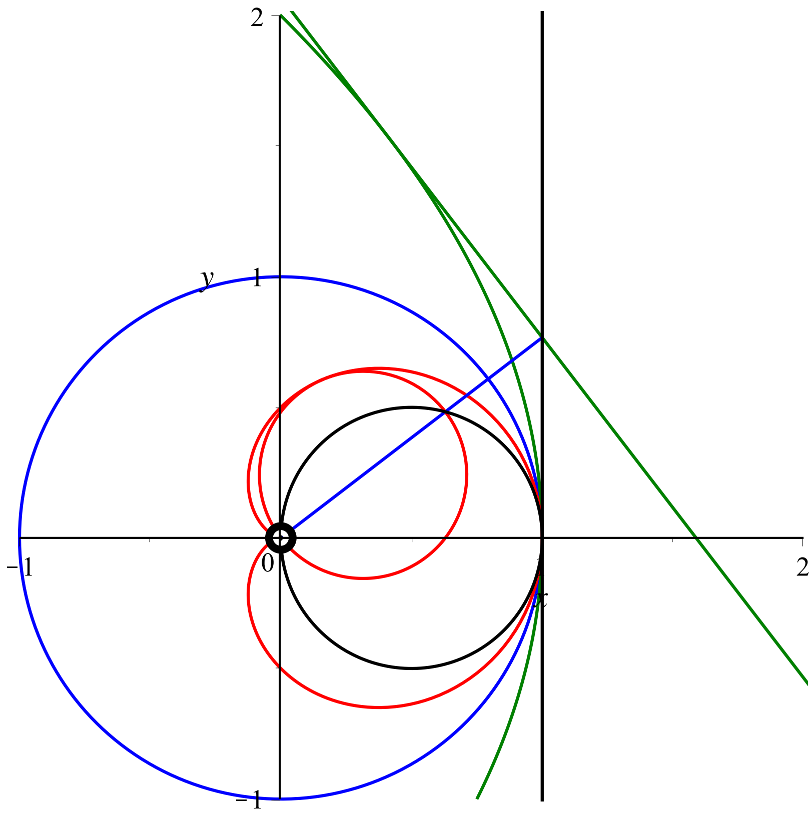

Abb. 5: Spiegeln der Tangente

Die Abbildung 6 zeigt zusätzlich den Berührungspunkt der grünen Tangente mit der Parabel einerseits und den Berührungspunkt des roten Bildkreises, des Thaleskreises also, mit der Kardioide.

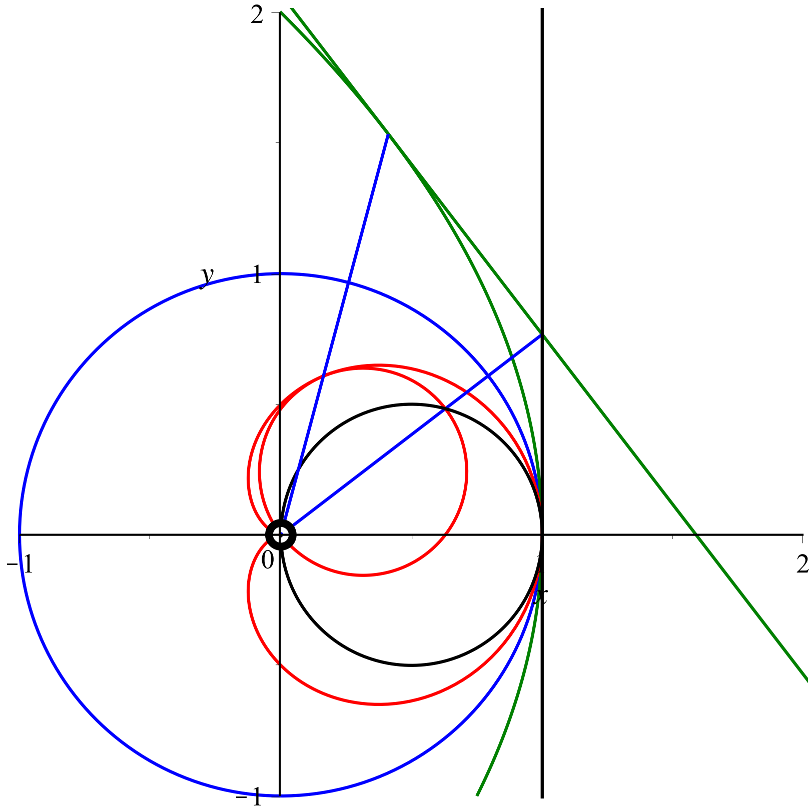

Abb. 6: Berührungspunkte

In der Abbildung 7 schließlich ist die Kardioide als Enveloppe der Thaleskreise dargestellt.

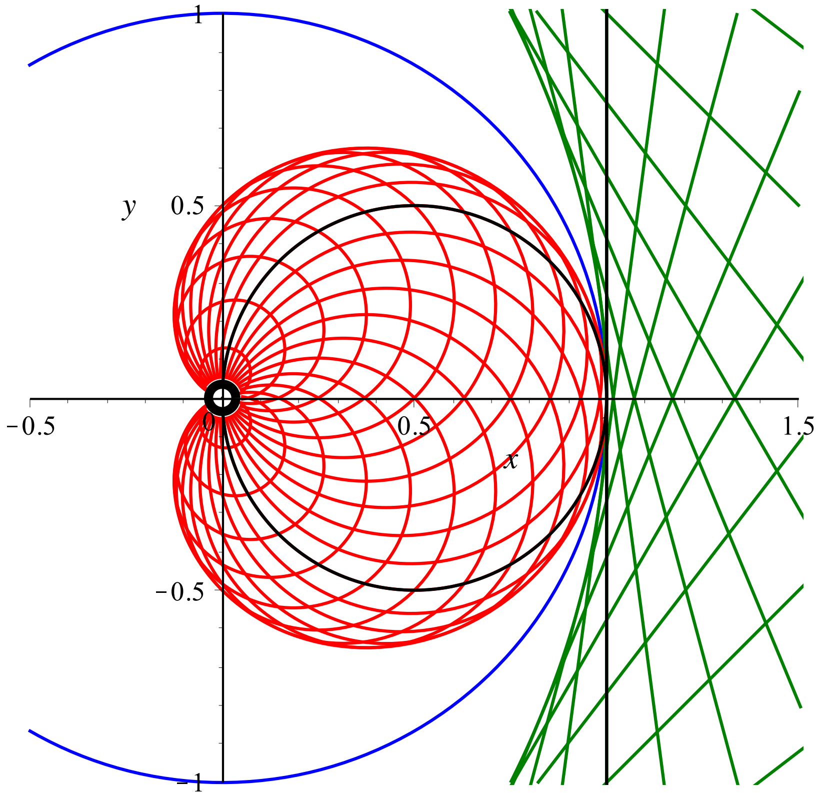

Abb. 7: Kardioide als Enveloppe

Der Ästhetik halber das Ganze gekippt (Abb. 8).

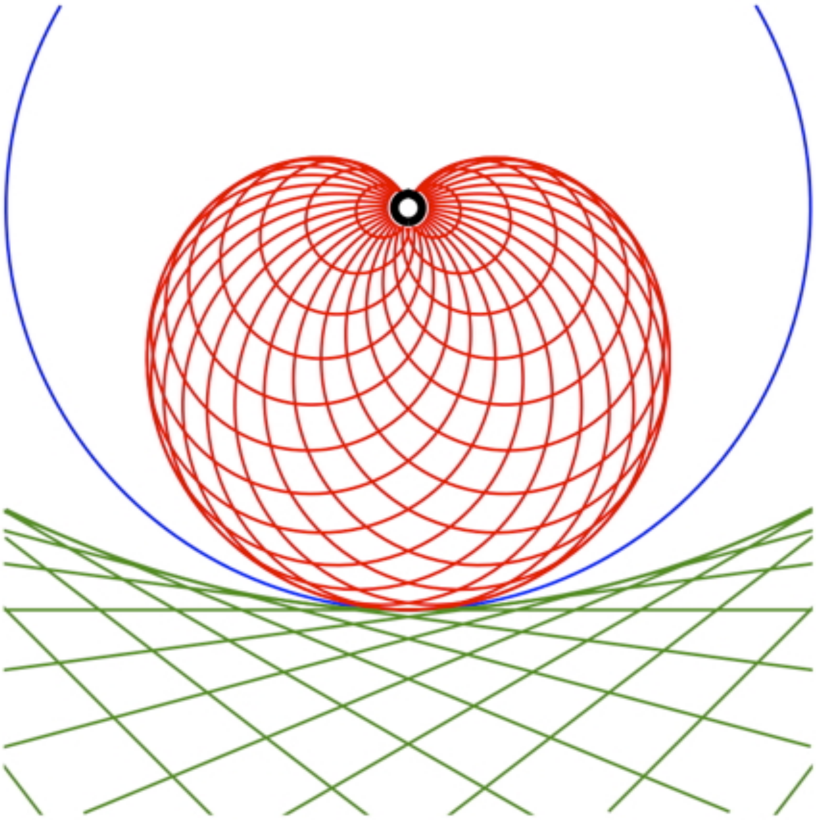

Abb. 8: Parabel und Kardioide