Hans Walser, [20200714]

Kantenmittenspirale

Anregung: M. E., B.

1 Worum es geht

Spiralen im Kontext von regelmäßigen Kantenmittenfiguren
Bilder

2 Regelmäßige Kantenmittenfiguren

Das Kantenmitten-n-Eck eines regelmäßigen n-Ecks ist ebenfalls regelmäßig, aber verkleinert um den Längenfaktor $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Iteration des Prozesses liefert eine Folge von regelmäßigen n-Ecken. Die Abbildung 1 zeigt das Beispiel für $n = 6$.

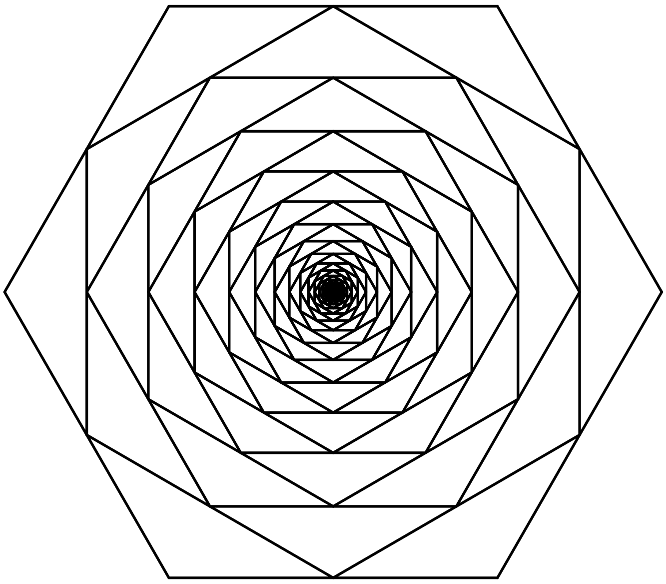

Abb. 1: Kantenmittenfigur

3 Kantenmittenspirale

Die Abbildung 2 zeigt eine Kantenmittenspirale in der Kantenmittenfigur der Abbildung 1. Die Spirale beginnt bei einer Ecke des äußersten n-Ecks und läuft bis zur anschließenden Kantenmitten. Dort geht sie über auf das anschließende n-Eck.

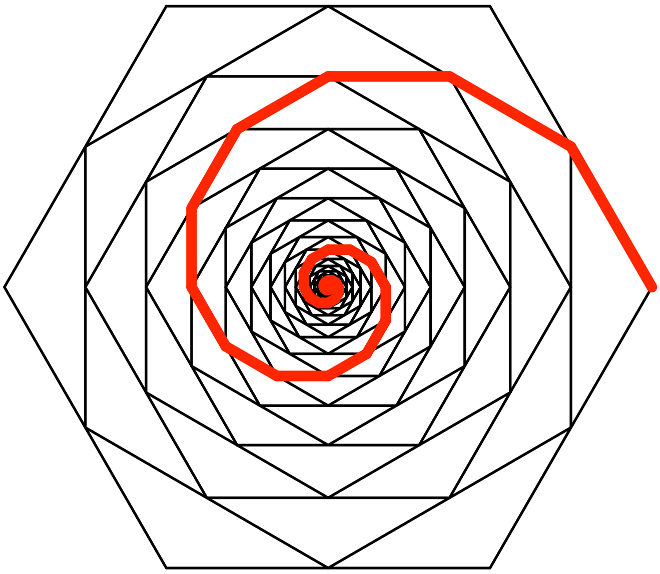

Abb. 2: Kantenmittenspirale

Die Teilstrecken der Kantenmittenspirale bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Bezogen auf die Seitenlänge 1 des äußersten n-Ecks hat die Spirale daher die Länge s_n:

$$s_n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \tag{1}$$

Im Beispiel der Abbildung 2 ist:

$$s_6 = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 2+\sqrt{3} \approx 3.732 \tag{2}$$

Es gibt insgesamt $2n$ Kantenmittenspiralen (Abb. 3), die durch Drehen und Spiegeln auseinander hervorgehen.
Die Spiralen sind eckige logarithmische Spiralen.

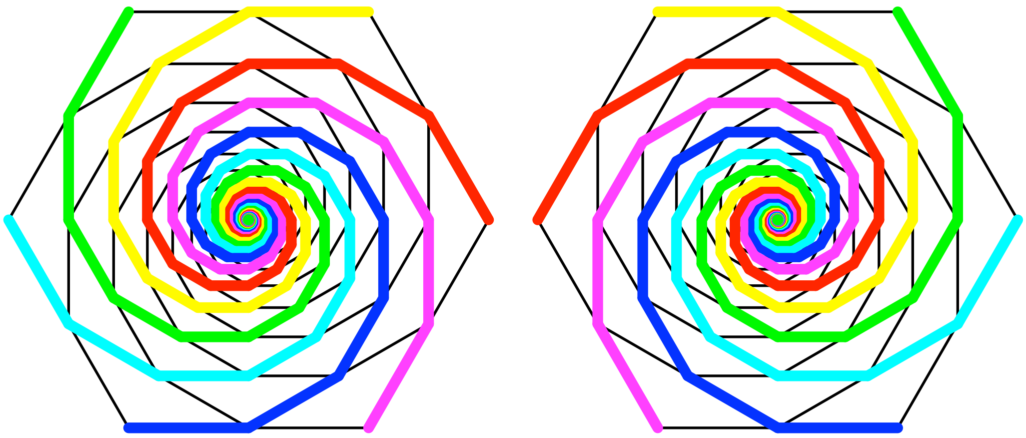

Abb. 3: Kantenmittenspiralen

4 Beispiele

Die Spiralenlänge ist jeweils auf die Seitenlänge 1 des äußersten n-Ecks bezogen.

4.3 Dreieck

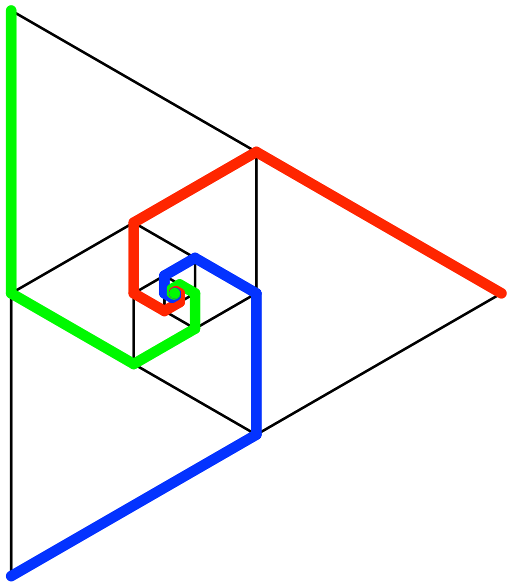

Abb. 4.03: Dreieck

Spiralenlänge = 1

4.4 Quadrat

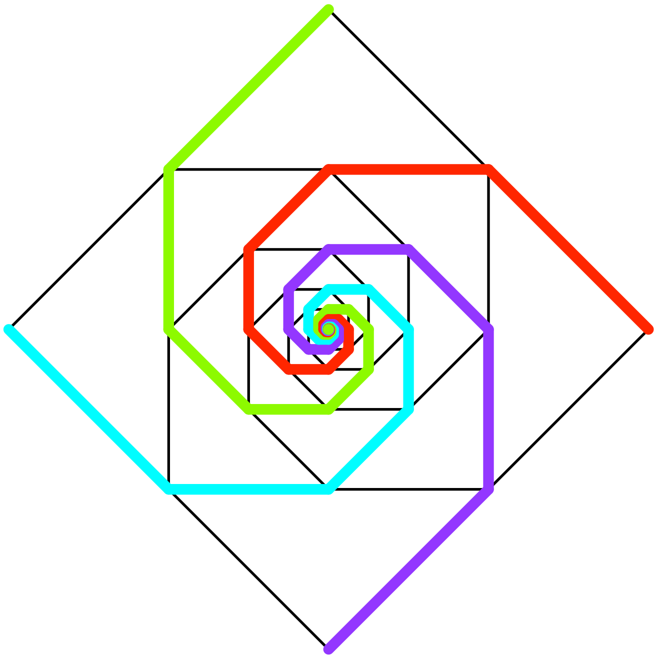

Abb. 4.04

Spiralenlänge $= 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.707106780$

4.5 Fünfeck

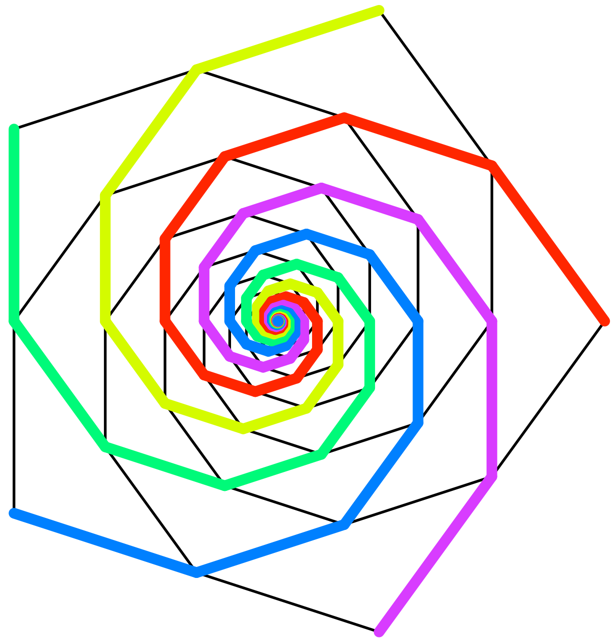

Abb. 4.05

Spiralenlänge = $1+\Phi = 1+\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618033990$

Dabei bedeutet $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033990$ den Goldenen Schnitt (Walser 2013)

4.6 Sechseck

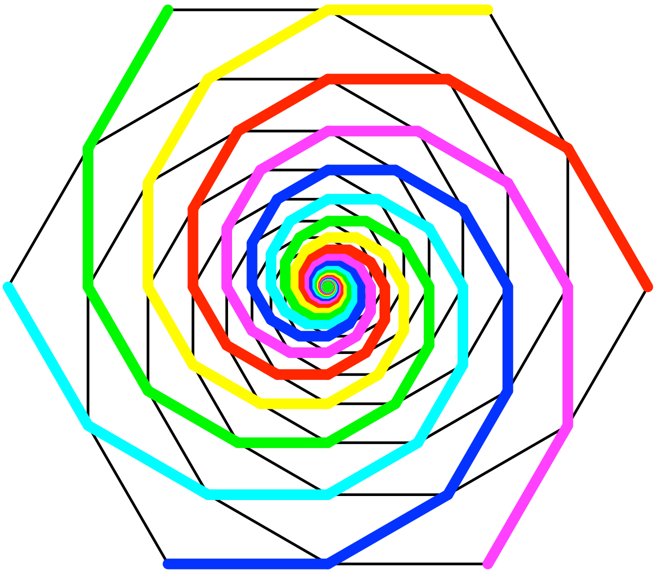

Abb. 4.06

Spiralenlänge = $2+\sqrt{3} \approx 3.732050814$

4.7 Siebeneck

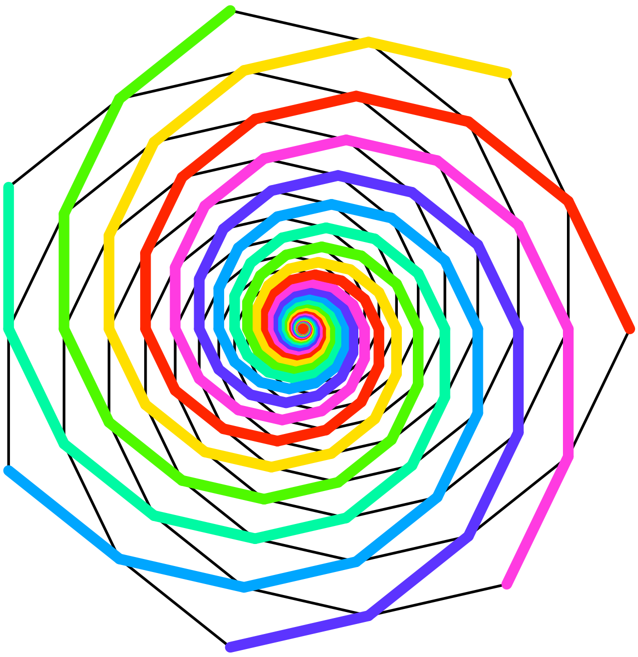

Abb. 4.07

Spiralenlänge etwa 3.732050814

4.8 Achteck

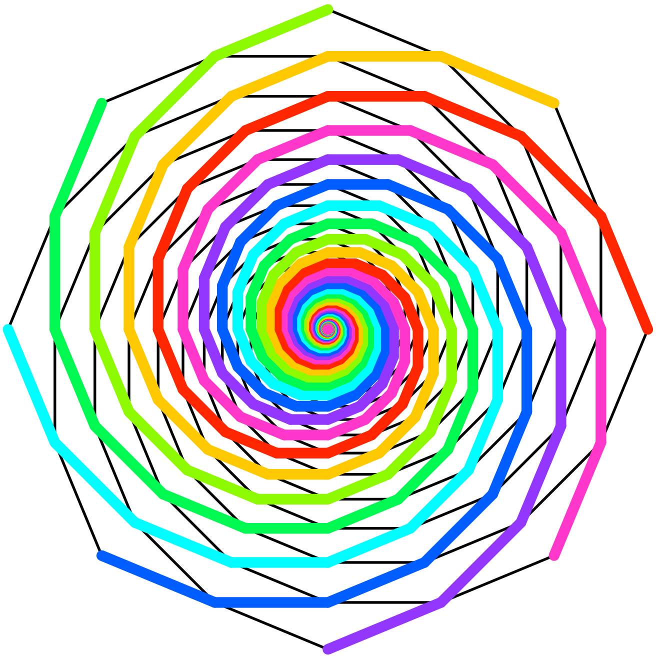

Abb. 4.08

Spiralenlänge = $2+\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}} \approx 6.5685356$

Zur wurzelmäßigen Berechnung der Spiralenlänge siehe [1].

4.9 Neuneck

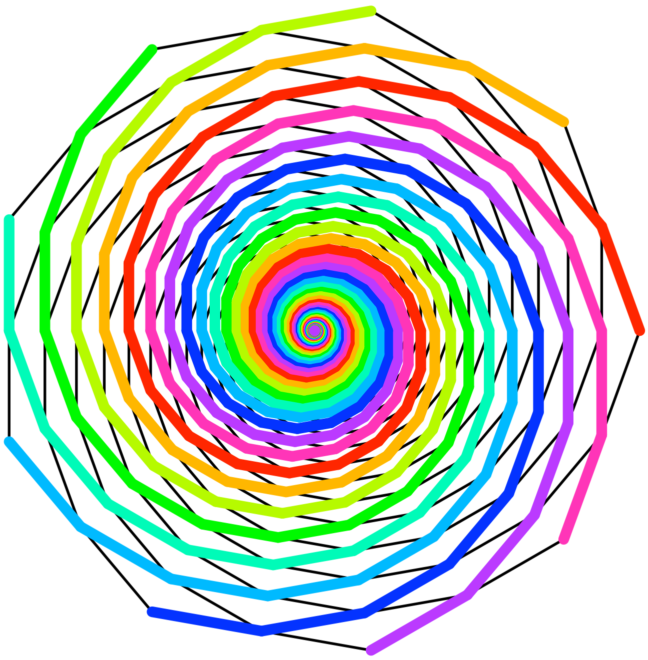

Abb. 4.09

Spiralenlänge etwa 8.290859360

4.10 Zehneck

Abb. 4.10

$$\text{Spiralenlänge} = \left(3+\sqrt{5}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) \approx 10.215865$$

Zur wurzelmäßigen Berechnung der Spiralenlänge siehe [1].

4.11 Elfeck

Abb. 4.11

Spiralenlänge etwa 12.34353760

4.12 Zwölfeck

Abb. 4.12

Spiralenlänge = $4+\frac{5}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{6}\approx 14.6738701$

Zur wurzelmäßigen Berechnung der Spiralenlänge siehe [1].

4.13 18-Eck

Abb. 4.18

Spiralenlänge etwa 32.91152454

Bemerkung: Zur Technik der Farbgebung im rgb-System siehe [2].

Websites

[1] Hans Walser: Kettenwurzeln

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kettenwurzeln/Kettenwurzeln.htm

[2] Hans Walser: Farbkreis

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Farbkreis/Farbkreis.htm

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.