Hans Walser, [20200109]

Invarianzbeweis für den Satz des Pythagoras

1 Worum geht es?

Invarianzbeweis unter Verwendung der Differentialrechnung

2 Erinnerung

Aus $y = x^2$ ergibt sich $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$. Die Abbildung 1 gibt eine Visualisierung dieses Sachverhaltes.

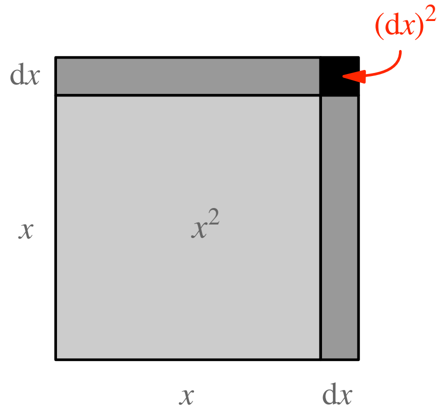

Abb. 1: Zuwachs beim Quadrat

Es ist:

$$(x + \mathrm{d}x)^2 = x^2 + 2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 \tag{1}$$

Und nun kommt der schmutzige Trick von Newton: wir lassen das $(\mathrm{d}x)^2$ einfach weg. Es ist „von höherer Ordnung klein“. Somit ergibt sich ein Zuwachs $2x\,\mathrm{d}x$. Es ist also:

$$\mathrm{d}\left(x^2\right) = 2x\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Entsprechend ist:

$$\mathrm{d}\left(a^2 + b^2\right) = 2a\,\mathrm{d}a + 2b\,\mathrm{d}b \tag{3}$$

3 Rechtwinkliges Dreieck

Nun gehen wir zum rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten a und b (Abb. 2).

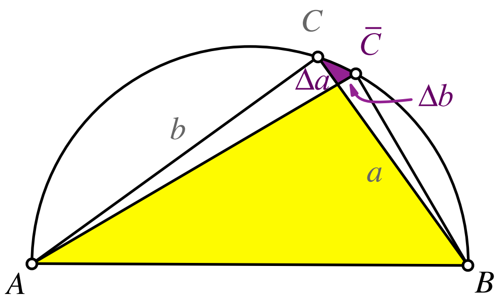

Abb. 2: Veränderung der Ecke *C*

Wir verschieben die Ecke C auf dem Thaleskreis nach rechts zu $\overline{C}$. Dadurch werden die Kathete a kleiner und die Kathete b größer.

Da das gelbe und das kleine violette Dreieck ähnlich sind (gleiche Winkel) und beide Dreiecke bei einer nur kleinen Verschiebung in etwa ähnlich zum rechtwinkligen Dreieck ABC, haben wir:

$$\frac{\Delta b}{\Delta a} \approx -\frac{a}{b} \tag{4}$$

Das Minuszeichen ergibt sich daraus, dass a kleiner wird, hingegen b größer.

Wenn die Verschiebung infinitesimal klein ist, gilt:

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a} = -\frac{a}{b}, \text{ also } \mathrm{d}b = -\frac{a}{b}\mathrm{d}a \tag{5}$$

Wir setzen (5) in (3) ein und erhalten:

$$\mathrm{d}\left(a^2 + b^2\right) = 2a\,\mathrm{d}a - 2b\frac{a}{b}\mathrm{d}a = 0 \tag{6}$$

Die Summe $a^2 + b^2$ ist also an jeder Stelle lokal und damit global konstant. Wir haben eine Invariante bei Verschiebung des Punktes C auf dem Thaleskreis.

Im Grenzfall $a \to 0, b \to c$ ergibt sich für die Invariante der Wert c^2.

Websites

Hans Walser: Invarianzbeweis für den Satz des Pythagoras

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/I/Invarianzbeweis_Pythagoras/Invarianzbeweis_Pythagoras.htm