Hans Walser, [20191223]

# Invariante Quadratsumme

## 1 Worum geht es?

Beweis des Satzes des Pythagoras mit Mitteln der Infinitesimalrechnung.

## 2 Invarianz im Großen

Wenn wir die Ecke mit dem rechten Winkel auf dem Thaleskreis bewegen, bleibt die Summe der Quadrate der Katheten invariant (Abb. 1).

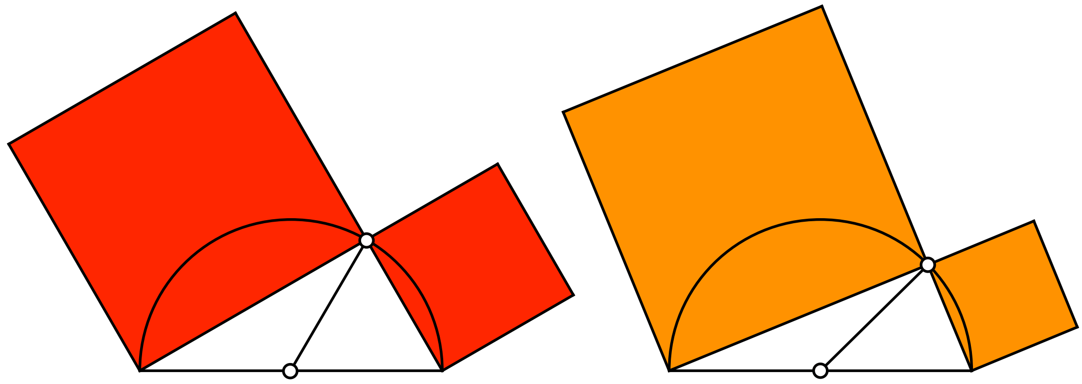

**Abb. 1: Rot = orange**

Wir versuchen, dies ohne Rückgriff auf das Hypotenusenquadrat zu beweisen.

## 3 Invarianz im Kleinen

Wir studieren, was bei einer infinitesimal kleinen Bewegung der Ecke mit dem rechten Winkel geschieht. Die Abbildung 2 zeigt eine kleine Bewegung, welche wir als infinitesimal klein uns denken.

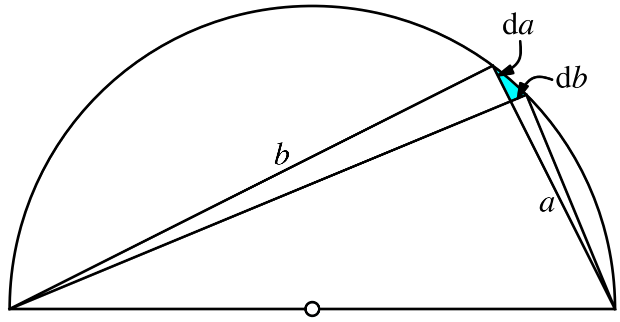


**Abb. 2: Kleine Bewegung**

Das hellblau eingezeichnete Dreieck ist praktisch ähnlich – und bei einer infinitesimal kleinen Bewegung überhaupt ähnlich – zum ursprünglichen rechtwinkligen Dreieck.

Die Katheten des blauen Dreiecks geben die Veränderungen der großen Katheten $a$ und $b$, und zwar ist:

$$-\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} = \frac{b}{a} \tag{1}$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass sich $a$ verkleinert, aber $b$ vergrößert.

Aus (1) ergibt sich:

$$\mathrm{d}b = -\tfrac{a}{b}\mathrm{d}a \tag{2}$$

Wir studieren nun die Änderung der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

$$\mathrm{d}\left(a^2 + b^2\right) = 2a\mathrm{d}a + 2b\mathrm{d}b \underset{(2)}{=} 2a\mathrm{d}a - 2b\tfrac{a}{b}\mathrm{d}a = 0 \tag{3}$$

Die Summe der Quadrate der beiden Katheten bleibt also überall lokal und damit global invariant. Dies war zu zeigen.

Die Gleichheit mit dem Hypotenusenquadrat folgt aus dem Grenzfall $a \to 0, b \to c$.

## 4 Randbemerkung: Andersherum gedreht

Es ist in der Schule üblich, die Ecke mit dem rechten Winkel auf dem Thaleskreis zu bewegen (Abb. 1, 2, 5).

Ebenso gut könnten wir diese Ecke festlassen und die Hypotenuse im Thaleskreis drehen (Abb. 3, 4, 6, 7).

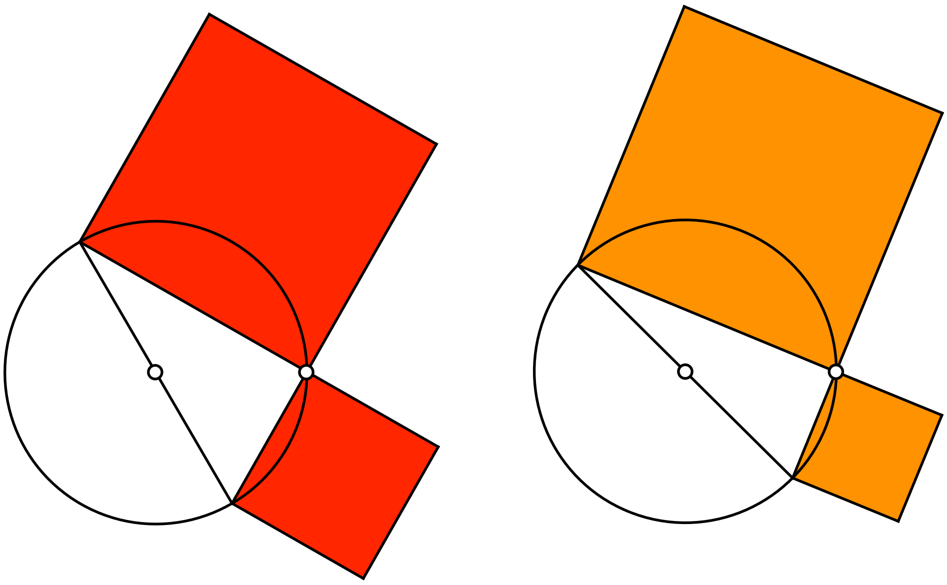

**Abb. 3: Rot = orange**

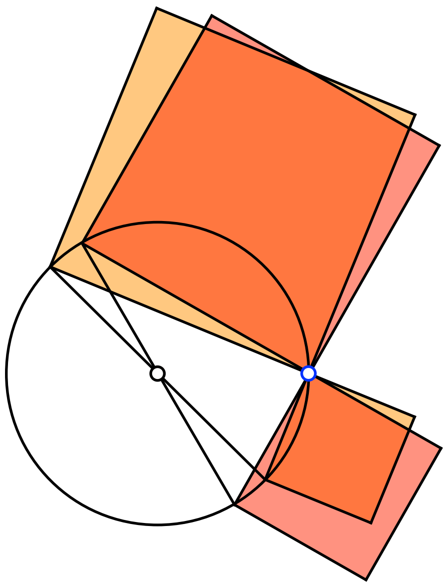

**Abb. 4: Rot = orange. Überlagerung**

# 5 Zerlegungsbeweise

## 5.1 Feste Hypotenuse

Die Abbildung 5 zeigt einen Zerlegungsbeweis für die Invarianz der Summe der Kathetenquadrate. Die Hypotenuse ist fest, die Ecke beim rechten Winkel variiert auf dem Thaleskreis. Die Teile lassen sich translatorisch ineinander überführen. Hintergrund ist der Zerlegungsbeweis von Perigal. Es braucht $4 \times 3 + 1 = 13$ Teile.

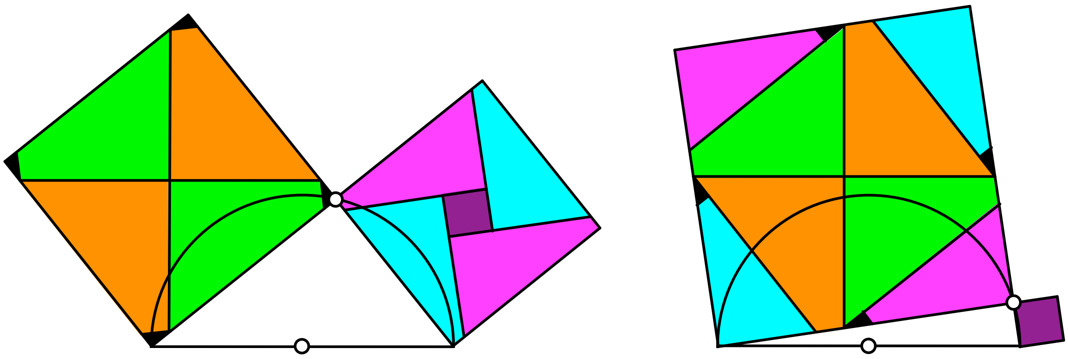

**Abb. 5: Zerlegungsbeweis**

## 5.2 Fester Eckpunkt beim rechten Winkel

Die Abbildung 6 zeigt einen Zerlegungsbeweis mit festem Eckpunkt beim rechten Winkel. Es wird die Hypotenuse gedreht. Es braucht acht Teile.

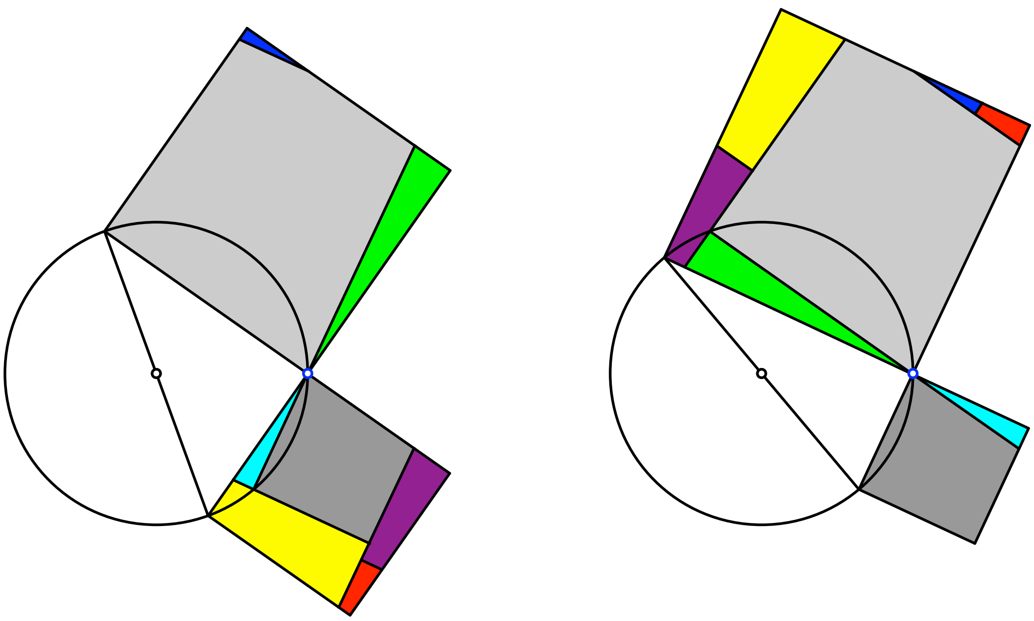

**Abb. 6: Drehen der Hypotenuse**

Die Teile können translatorisch oder durch Drehungen um Vielfache von 90° ineinander übergeführt werden. Die grauen Teile bleiben ortsfest.

Die Abbildung 7 zeigt die Überlagerung der beiden Figuren der Abbildung 6.

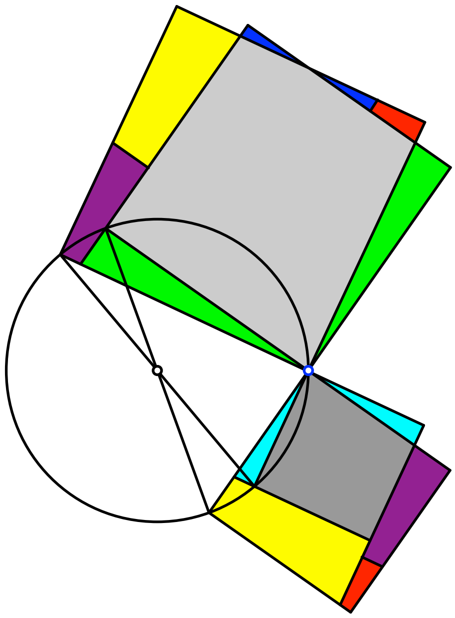

**Abb. 7: Überlagerung**

## Websites

Hans Walser: Invarianzbeweis für den Satz des Pythagoras

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/I/Invarianzbeweis_Pythagoras/Invarianzbeweis_Pythagoras.htm