

Hans Walser, [20190725]

Ikosaeder

Anregung: G. M., M.

1 Worum geht es?

Die Zentralprojektion eines Ikosaeders auf seine Umkugel (sphärisches Ikosaeder) wird mit Plastikstreifen modelliert. Kombinatorische Aspekte.

2 Das Modell

Die Abbildung 1 zeigt ein Modell aus 30 Plastikstreifen und 12 Mustertütenklammern.



Abb. 1: Modell aus 30 Plastikstreifen

Jede Mustertütenklammer verbindet fünf Streifenenden.

Die Herausforderung ist nun, die Streifen möglichst symmetrisch zu verbinden.

3 Fünf Farben

Wir arbeiten mit je sechs Streifen in fünf Farben. Im Modell der Abbildung 2 werden die fünf Farben

- (1) weiß
- (2) hellgrün
- (3) gelb
- (4) dunkelgrün
- (5) schwarz

verwendet. Die angegebenen Nummern verwenden wir im Folgenden zur Codierung der Farben.



Abb. 2: Fünf Farben

Bei jeder Mustertütenklammer kommt jede Farbe genau einmal vor, und zwar von außen nach innen in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5.

Andererseits haben wir bei jeder Mustertütenklammer eine andere zyklische Reihenfolge der fünf Farben.

4 Kombinatorischer Aspekt

Für n Elemente gibt es $(n - 1)!$ zyklische Reihenfolge, da wir ein bestimmtes Element als Startelement definieren können.

Für unsere fünf Farben gibt es daher $(5 - 1)! = 4! = 24$ zyklische Reihenfolgen. Diese sind in der Tabelle 1 in lexikografischer Reihenfolge aufgelistet, wobei immer die Farbe 1 als Startelement gewählt wurde.

12345	13245	14235	15234
12354	13254	14253	15243
12435	13425	14325	15324
12453	13452	14352	15342
12534	13524	14523	15423
12543	13542	14532	15432

Tab. 1: Zyklische Reihenfolge der Farben

Die weiß unterlegten Fälle sind gerade Permutationen der Ausgangsreihenfolge 12345. Wir können diese mit einer geraden Anzahl Zweivertauschungen ineinander überführen. Die gelb unterlegten Fälle sind ungerade Permutationen der Ausgangsreihenfolge 12345.

Wir wählen nun die zwölf geraden zyklischen Permutationen für unsere Mustertütenklammern.

5 Schlegel-Diagramm

Die Abbildung 3 ist ein Schlegel-Diagramm des Ikosaeders. Dabei wurden die Kanten mit den Farben

- (1) rot
- (2) grün
- (3) blau
- (4) magenta
- (5) zyan

gefärbt. Aus darstellungstechnischen Gründen weichen die Farben von denen des Modells der Abbildung 2 ab.

Bei jedem Knoten (das heißt bei jeder Mustertütenklammer) kommen genau die fünf Farben vor, aber jedes Mal in einer anderen zyklischen Reihenfolge. Die zyklischen Reihenfolgen entsprechen den geraden Permutationen der Tabelle 1. In der Abbildung 3 sind drei Knoten (die Ecken des großen Dreieckes) entsprechend markiert. Der Start ist jeweils bei 1, also rot, und dann geht es im positiven Drehsinn (Gegenuhrzeigersinn) herum.

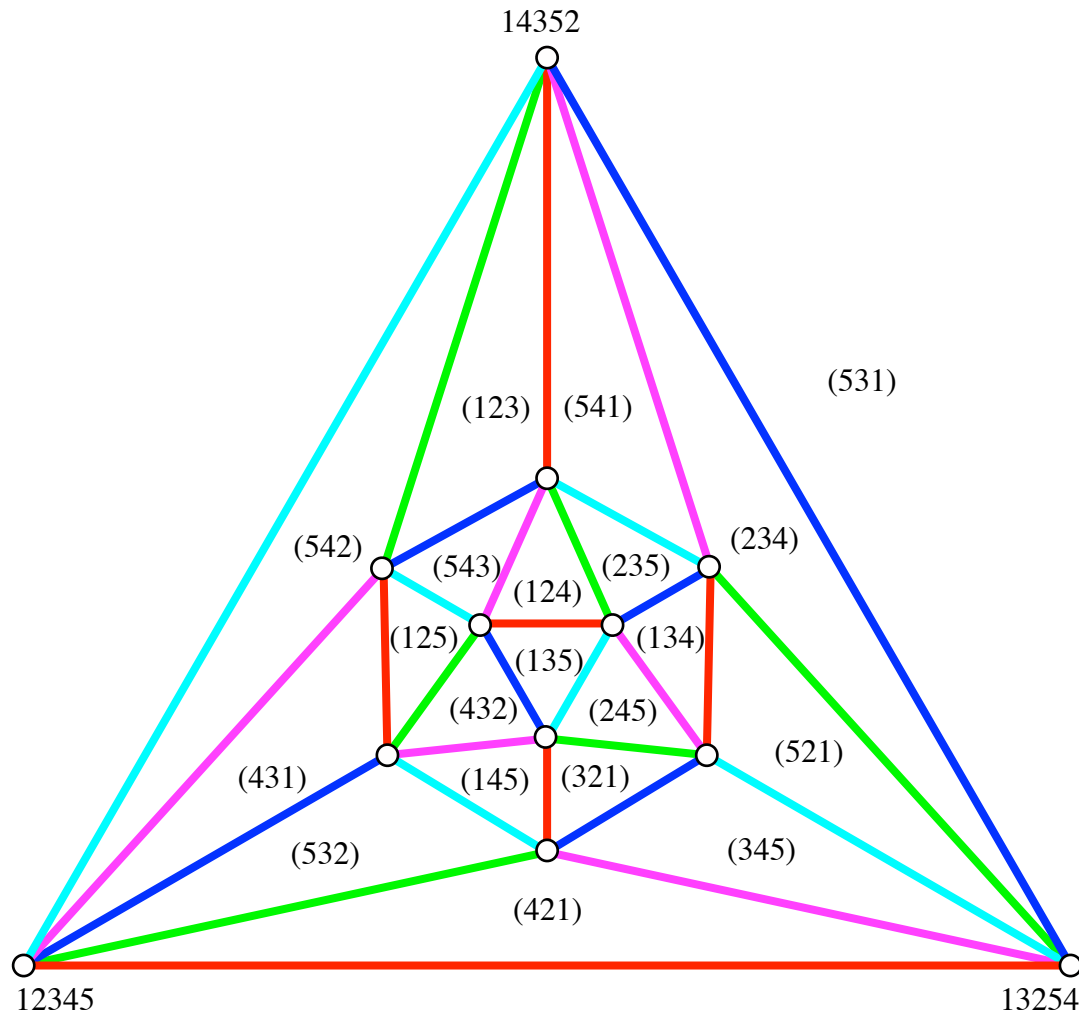


Abb. 3: Schlegel-Diagramm

6 Dreiecke

Jedes Dreieck ist von drei verschiedenen Farben berandet. Da wir fünf Farben haben, gibt es zunächst $\binom{5}{3} = 10$ möglich Farbauswahlen. Diese sind in der Tabelle 2, linke Spalte, lexikografisch aufgelistet.

(123)	(321)
(124)	(421)
(125)	(521)
(134)	(431)
(135)	(531)
(145)	(541)
(234)	(432)
(235)	(532)
(245)	(542)
(345)	(543)

Tab. 2: Farbauswahlen

Nun kann aber die Färbung der Dreieckseiten auch in umgekehrter zyklischer Reihenfolge geschehen. Wir erhalten also auch noch die Farbreihenfolgen der rechten Spalte der Tabelle 2. Somit haben wir 20 verschiedene Färbungsreihenfolgen für die 20 Dreiecke des Ikosaeders. Sämtliche Dreiecke im Schlegel-Diagramm sind entsprechend codiert. Neckisch ist die Färbung (531). Das zugehörige Dreieck ist die Außenfläche des Schlegel-Diagramms. Das dreht auch die Orientierung um.

7 Bemerkungen

Wenn wir einen Streifen über die Mustertütenklammer hinaus verlängern, wird er zur Symmetrieachse des anschließenden Dreiecks. Die dazu orthogonale Basisseite dieses Dreiecks hat dann dieselbe Farbe wie der verlängerte Streifen.

Die Endpunkte von zwei gegenüberliegenden Streifen gleicher Farbe bilden ein sogenanntes Goldenes Rechteck. Die drei Paare gegenüberliegender Streifen gleicher Farbe führen daher zum üblichen Gerüst für das Ikosaeder (Walser 2013, S. 141).

Das Modell der Abbildung 1 hat dieselbe Raumstruktur wie das mehrfarbige Modell der Abbildung 2.

Literatur

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage.
Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.