Hans Walser, [20210614]

Hyperkugel

1 Worum geht es?

Rekursion für das *n*d-Volumen der *n*d-Hyperkugel.

2 Rekursion

Für das Volumen V_n der n-dimensionalen Hyperkugel mit dem Radius r arbeiten wir mit dem Ansatz:

$$V_n(r) = a_n \, r^n \tag{1}$$

Wegen $V_1 = 2r$ (Doppelintervall von $0 - r$ bis $0 + r$) ist:

$$a_1 = 2 \tag{2}$$

Es gilt die Rekursion:

$$a_{n+1} = a_n \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}^{\,n} \, \mathrm{d}t \tag{3}$$

Die Abbildung 1 zeigt n und a_n.

$$1,\ 2$$
$$2,\ \pi$$
$$3,\ \frac{4\pi}{3}$$
$$4,\ \frac{\pi^2}{2}$$
$$5,\ \frac{8\pi^2}{15}$$
$$6,\ \frac{\pi^3}{6}$$
$$7,\ \frac{16\pi^3}{105}$$
$$8,\ \frac{\pi^4}{24}$$
$$9,\ \frac{32\pi^4}{945}$$
$$10,\ \frac{\pi^5}{120}$$

Abb.1: Koeffizienten

3 Explizit

Die Koeffizienten a_n können explizit berechnet werden (ohne Beweis):

$$a_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{4}$$

Dabei ist:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{5}$$

4 Oberfläche

Für die Oberfläche $S_n(r)$ gilt:

$$S_n(r) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V_n(r) = n a_n r^{n-1} \tag{6}$$

5 Übersicht

Die Abbildung 2 gibt n, $V_n(r)$ und $S_n(r)$.

$$1,\ 2\,r,\ 2$$
$$2,\ \pi\,r^2,\ 2\,\pi\,r$$
$$3,\ \frac{4\,\pi\,r^3}{3},\ 4\,\pi\,r^2$$
$$4,\ \frac{\pi^2\,r^4}{2},\ 2\,\pi^2\,r^3$$
$$5,\ \frac{8\,\pi^2\,r^5}{15},\ \frac{8\,\pi^2\,r^4}{3}$$
$$6,\ \frac{\pi^3\,r^6}{6},\ \pi^3\,r^5$$
$$7,\ \frac{16\,\pi^3\,r^7}{105},\ \frac{16\,\pi^3\,r^6}{15}$$
$$8,\ \frac{\pi^4\,r^8}{24},\ \frac{\pi^4\,r^7}{3}$$
$$9,\ \frac{32\,\pi^4\,r^9}{945},\ \frac{32\,\pi^4\,r^8}{105}$$
$$10,\ \frac{\pi^5\,r^{10}}{120},\ \frac{\pi^5\,r^9}{12}$$

Abb. 2: Dimension, Volumen und Oberfläche