Hans Walser, [20201015]

Hilfssatz 1

1 Worum geht es?

Ein Satz aus der Geometrie. Beweis rechnerisch mit CAS. Ein geometrischer Beweis ist mir nicht gelungen.

2 Schritt für Schritt

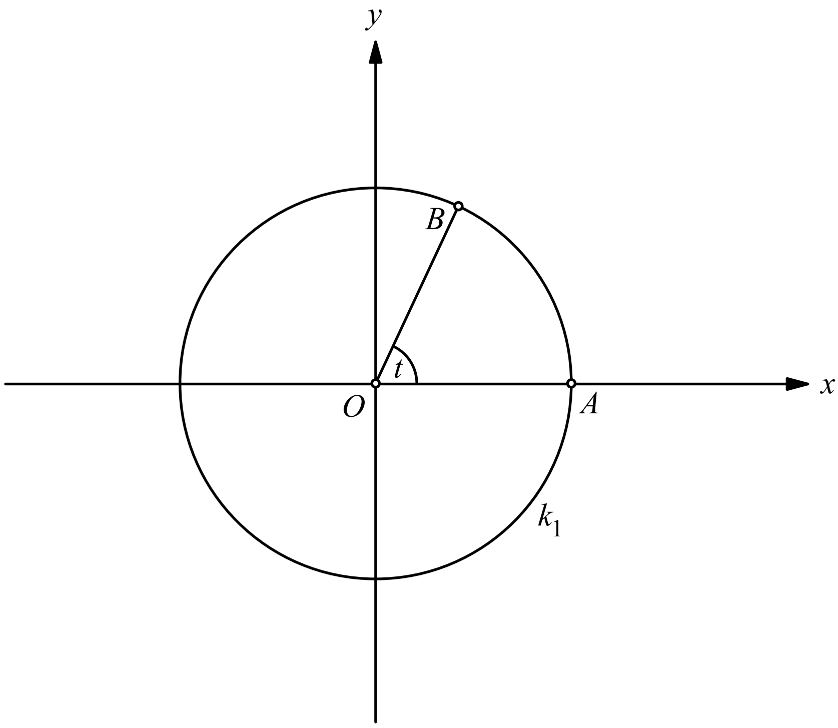

Abb. 1: Punkt auf Einheitskreis

Auf dem Einheitskreis zeichnen wir den festen Punkt $A = (1, 0)$ und den variablen Punkt $B = (\cos(t), \sin(t))$ (Abb. 1).

Weiter zeichnen wir den von A ausgehenden Strahl c über B sowie dessen Spiegelbild d bei Spiegelung an der Geraden $x = 1$ (Abb. 2).

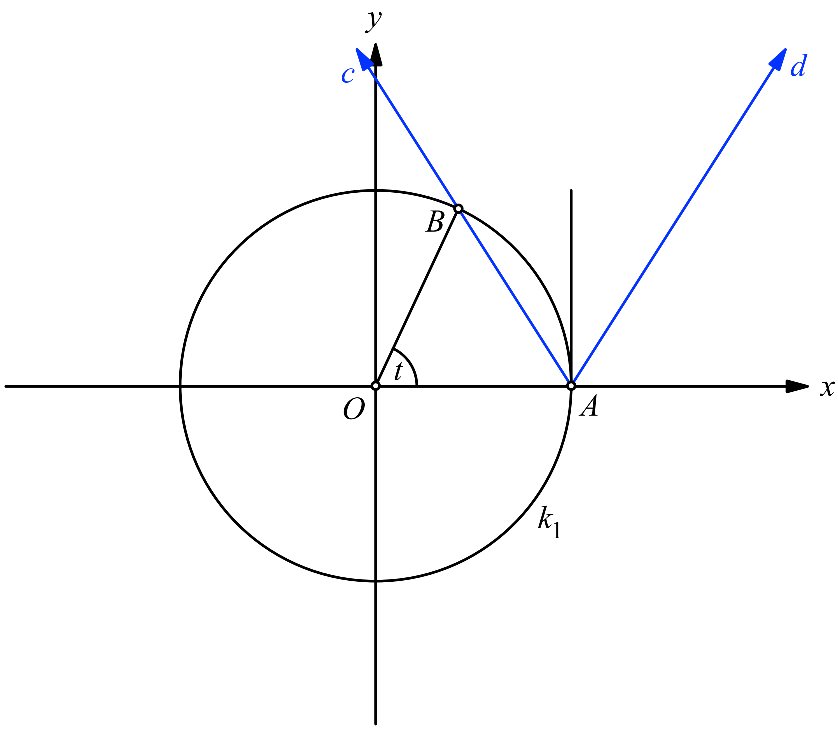

Abb. 2: Strahle

Die Strahle schneiden wir mit dem Kreis k_2 um den Ursprung und dem Radius $\sqrt{2}$. Die Schnittpunkte seien C und D (Abb. 3).

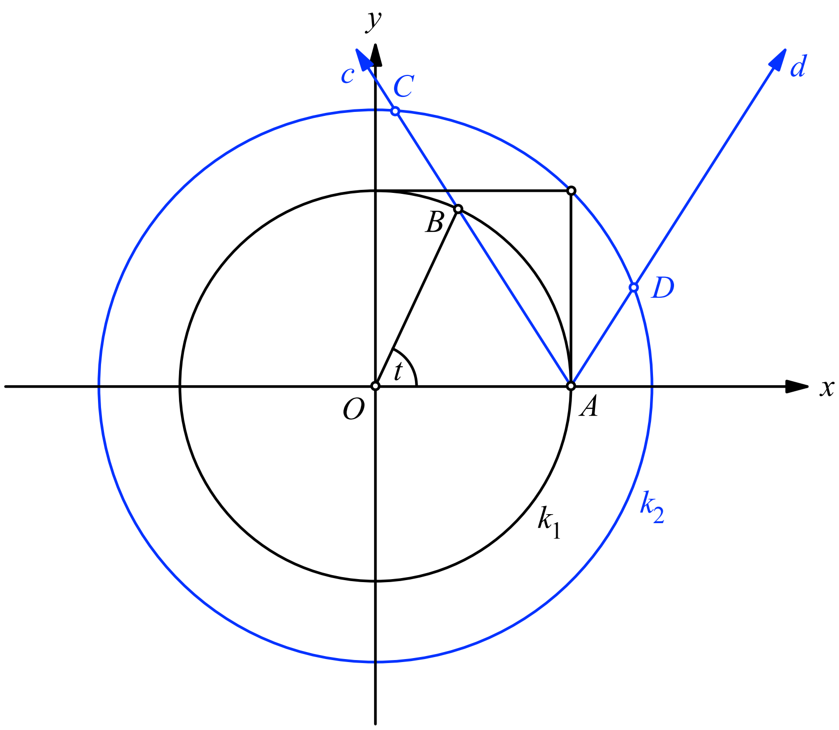

Abb. 3: Schnittpunkte

Der Punkt C hat die Koordinaten:

$$C=\left(\frac{(\cos(\phi)-1)\sqrt{-\cos^2(\phi)+2\cos(\phi)+3}+(\cos(\phi)+1)\sin(\phi)}{2\sin(\phi)},\frac{\sin(\phi)}{2}+\frac{\sqrt{-\cos^2(\phi)+2\cos(\phi)+3}}{2}\right)$$

Für den Punkt D erhalten wir:

$$D=\left(\frac{-\cos(\phi)\sqrt{-\cos^2(\phi)+2\cos(\phi)+3}+\cos(\phi)\sin(\phi)+\sqrt{-\cos^2(\phi)+2\cos(\phi)+3}+\sin(\phi)}{2\sin(\phi)},-\frac{\sin(\phi)}{2}+\frac{\sqrt{-\cos^2(\phi)+2\cos(\phi)+3}}{2}\right)$$

Nun zeichnen wir den Mittelpunkt M der Strecke CD (Abb. 4).

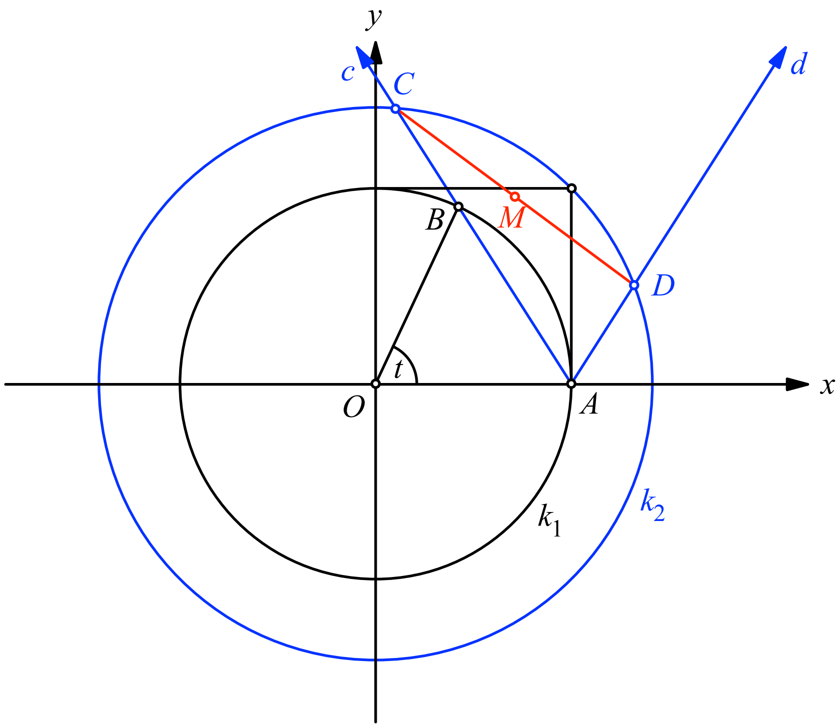

Abb. 4: Mittelpunkt

Dieser Mittelpunkt M hat die Koordinaten:

$$M = \left(\frac{\cos(\phi)}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{-\cos^2(\phi) + 2\cos(\phi) + 3}}{2} \right)$$

Wegen

$$\left(x_M - 1\right)^2 + y_M^2 = 1$$

liegt der Punkt M auf dem Kreis k_3 um A mit dem Radius 1 (Abb. 5).
Dies ist die Aussage des Hilfssatzes 1.

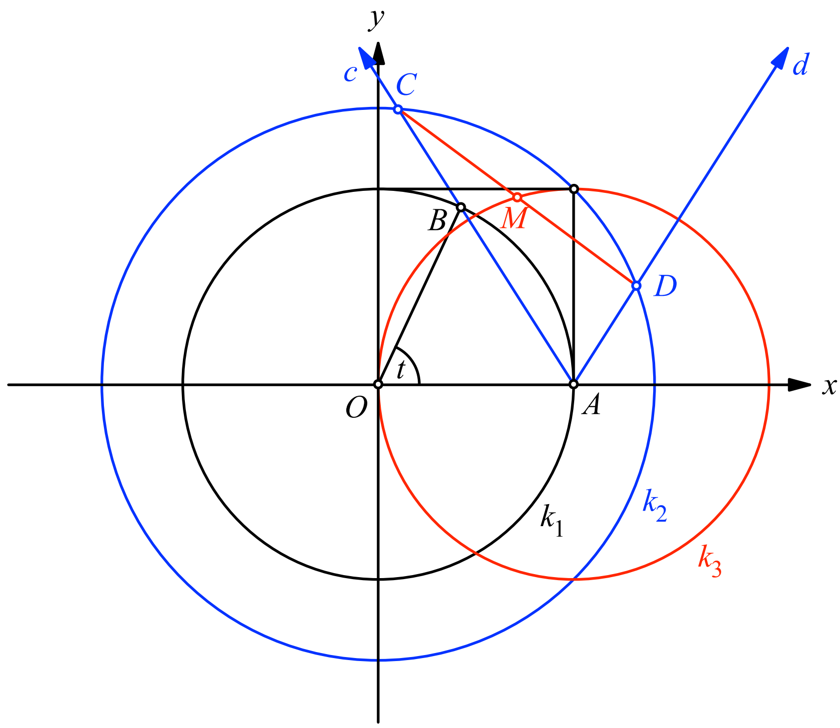

Abb. 5: Mittelpunkt auf Kreis