

Hans Walser, [20200625]

## Harmonische Folge

### 1 Worum geht es?

Zu zwei gegebenen Werten  $a_1$  und  $a_2$  ist die harmonische Folge gesucht.

### 2 Rekursion

Wir arbeiten mit dem harmonischen Mittel:

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} \right) \quad (1)$$

Daraus ergibt sich die Rekursion:

$$a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{2a_n - a_{n+1}} \quad (2)$$

Zusammen mit den Startwerten kann nun die harmonische Folge rekursiv berechnet werden.

### 3 Explizite Formel

Wir arbeiten mit dem Ansatz (gebroschen lineare Funktion):

$$a_n = \frac{1}{\alpha + \beta n} \quad (3)$$

Einsetzen der Startwerte liefert:

$$\alpha = \frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_2}, \quad \beta = -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \quad (4)$$

Damit erhalten wir aus (3) die explizite Formel:

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_1(n-1) - a_2(n-2)} \quad (5)$$

## 4 Beispiele

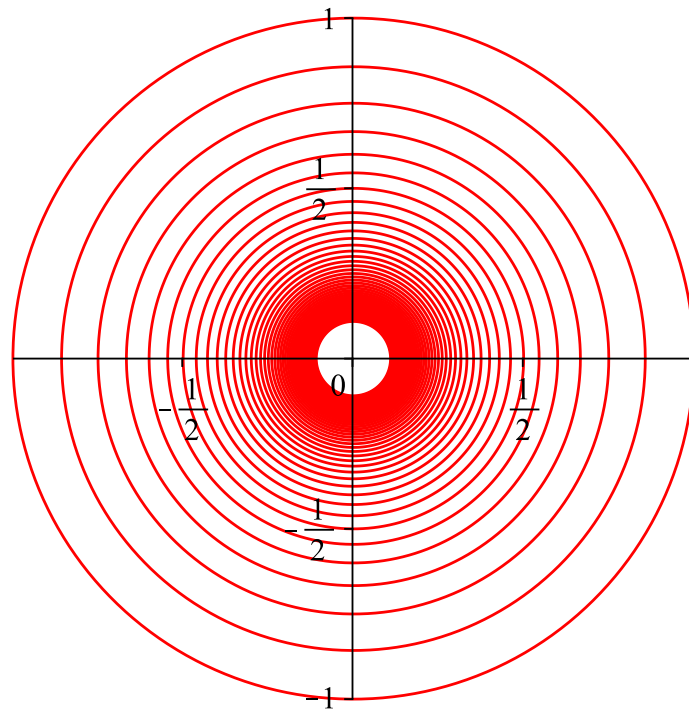
$n$	$a_n$	$b_n$	$c_n$	$d_n$	$e_n$	$f_n$
1	1	1	1	1	5	4
2	1/2	6/7	7/6	5/3	4	5
3	1/3	3/4	7/5	5	10/3	20/3
4	1/4	2/3	7/4	-5	20/7	10
5	1/5	3/5	7/3	-5/3	5/2	20
6	1/6	6/11	7/2	-1	20/9	*
7	1/7	1/2	7	-5/7	2	
8	1/8	6/13	*	-5/9	20/11	
9	1/9	3/7		-5/11	5/3	
10	1/10	2/5		-5/13	20/13	

\* Division durch null

**Tab. 1: Beispiele**

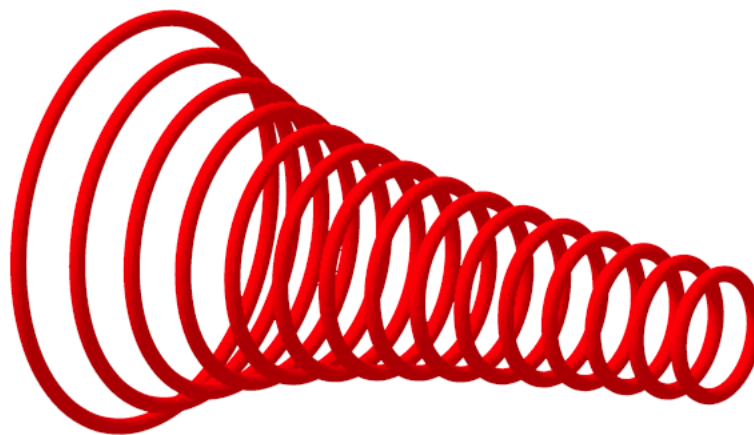
## 5 Kreise

Die Abbildung 1 zeigt eine Folge von konzentrischen Kreisen mit Radien gemäß der Folge  $b_n$  der Tabelle 1.



**Abb. 1: Harmonische Kreisradien**

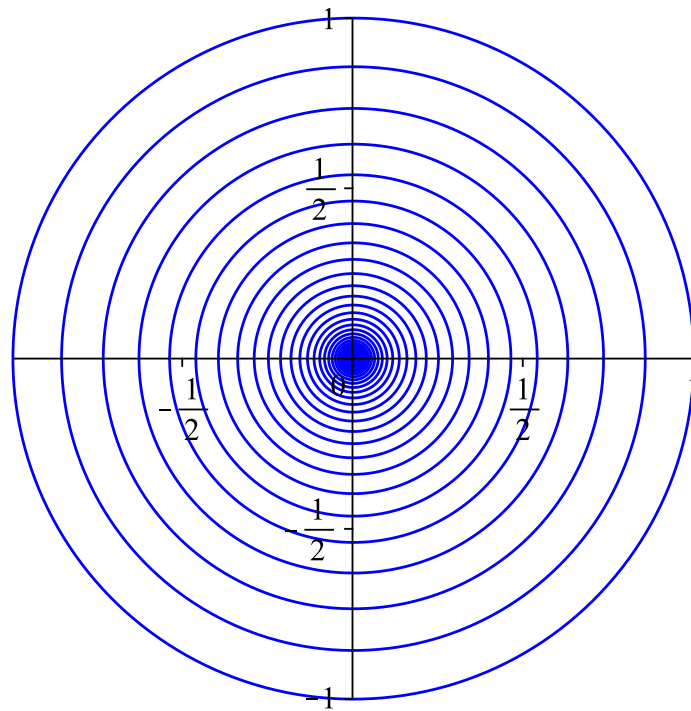
Die Abbildung 2 zeigt die Kreisschar räumlich.



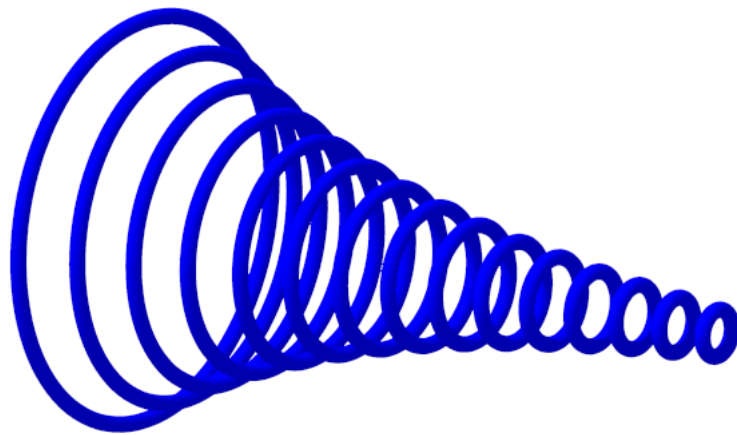
**Abb. 2: Räumliche Darstellung**

## 6 Geometrische Folge

Die Abbildungen 3 und 4 geben im Vergleich dazu eine Kreisschar, deren Radien im Sinne einer geometrischen Folge abnehmen.



**Abb. 3: Geometrisch abnehmende Kreisradien**



**Abb. 4: Räumliche Darstellung**