Hans Walser, [20181209]

Halbkreise im Rechteck

1 Worum geht es?

Eine Konstruktion mit sich berührenden Halbkreisen führt zu Rechtecken mit Rang und Namen. Der Grenzfall liefert eine spezielle Folge von pythagoreischen Dreiecken.

2 Vorgehen

Über der linken Seite eines Rechteckes zeichnen wir einen Thaleskreis. Über der rechten Seite zeichnen wir n Halbkreise, die sich nachbarlich berühren und die auch den Thaleskreis über der linken Seite berühren.

Die Abbildung 1 zeigt die Situation für $n = 6$.

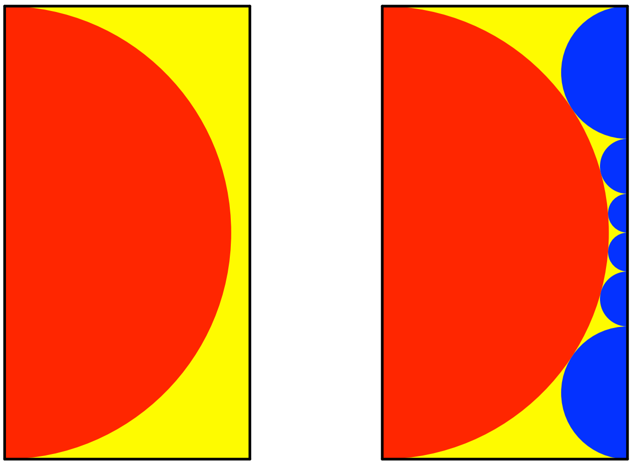

Abb. 1: Sechs blaue Halbkreise

Wie muss das Rechteck in Abhängigkeit von n dimensioniert sein?

3 Beispiele

3.1 Ein blauer Halbkreis

Die Lösung ist ein Quadrat (Abb. 2.1).

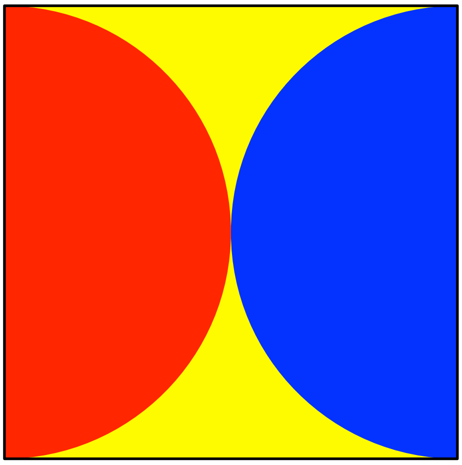

Abb. 2.1: Ein blauer Halbkreis. Quadrat

3.2 DIN-Rechteck

Bei zwei blauen Halbkreisen ist ein Rechteck im DIN-Seitenverhältnis erforderlich (Abb. 2.2). Über das DIN-Format siehe Walser(2013b). Weblink[1].

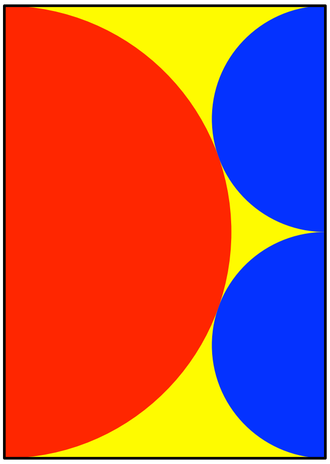

Abb. 2.2: DIN-Rechteck

3.3 Goldenes Rechteck

Bei drei blauen Halbkreisen ist ein Rechteck im Seitenverhältnis des Goldenen Schnittes erforderlich (Abb. 2.3).

Die Radien der blauen Kreise sind ebenfalls im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wie durch das Pentagramm illustriert wird.

Über den Goldenen Schnitt siehe Walser(2013a). Weblink [2] .

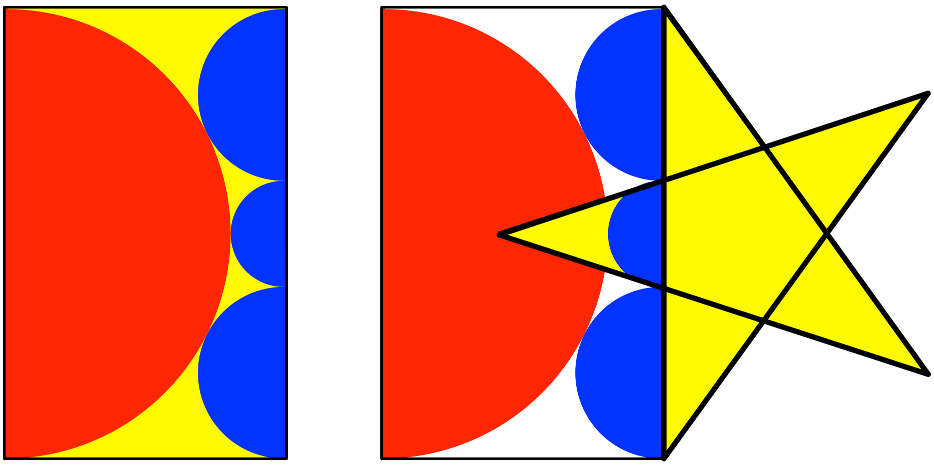

Abb. 2.3: Goldenes Rechteck. Pentagramm

3.4 Gruß vom gleichseitigen Dreieck

Bei vier blauen Halbkreisen ist ein Rechteck erforderlich dessen Diagonalen sich unter einem Winkel von 60° schneiden (Abb. 2.4). Wir können daher zwei gleichseitige Dreiecke einpassen. Die Radien der blauen Halbkreise stehen im Verhältnis 2:1.

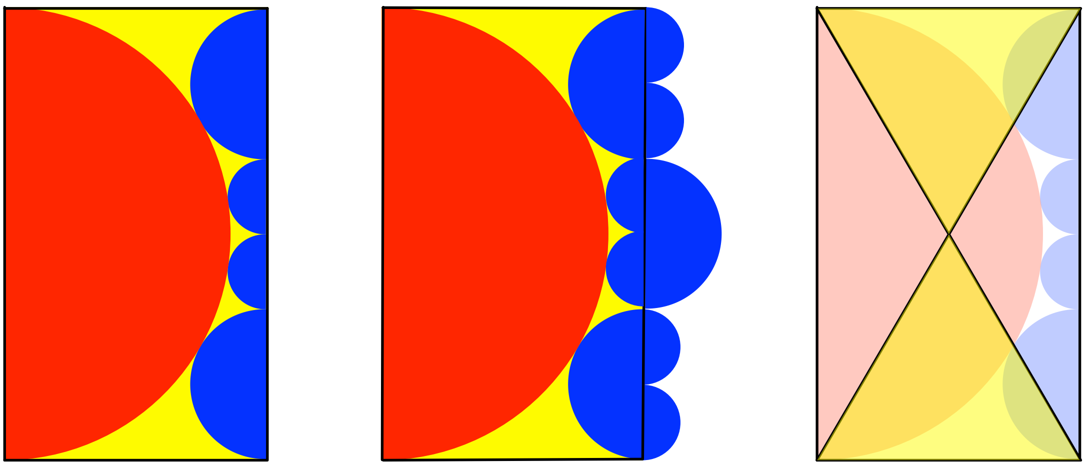

Abb. 2.4: Gleichseitiges Dreieck

3.5 Fünf blaue Halbkreise

Bei fünf blauen Halbkreisen (Abb. 2.5) habe ich keine schöne elementargeometrische Eigenschaft gefunden.

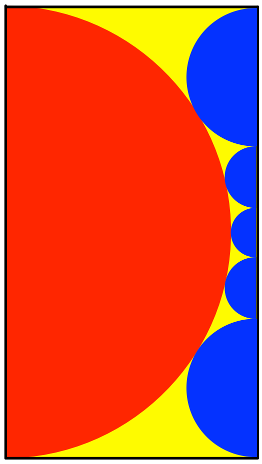

Abb. 2.5: Fünf blaue Halbkreise

3.6 Sechs blaue Halbkreise. DIN-Rechteck

Bei sechs blauen Halbkreisen (Abb. 1) finden wir nach einigem Suchen ein DIN-Rechteck (Abb. 2.6).

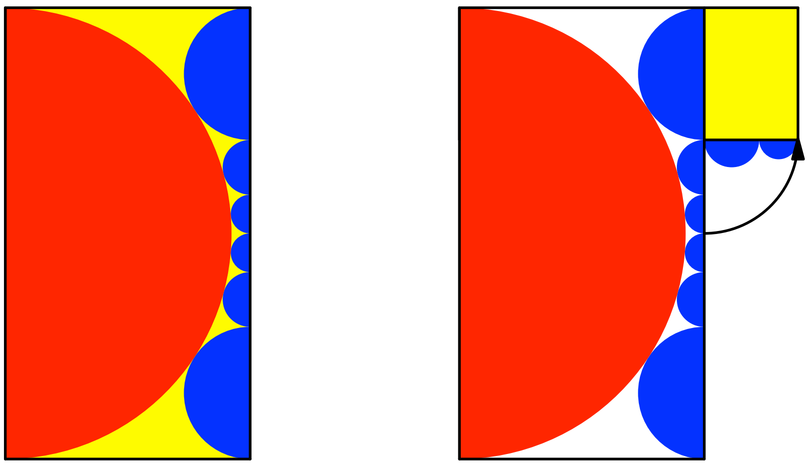

Abb. 2.6: Nochmals DIN-Rechteck

4 Bearbeitung

Es ist sinnvoll, mit einer Fallunterscheidung bezüglich der Parität der Anzahl n der blauen Halbkreise zu arbeiten.

4.1 Gerade Anzahl von blauen Halbkreisen

Es sei $n = 2m$. Wir verwenden die Maße und Bezeichnungen der Abbildung 3 (für den partikulären Fall $m = 3$).

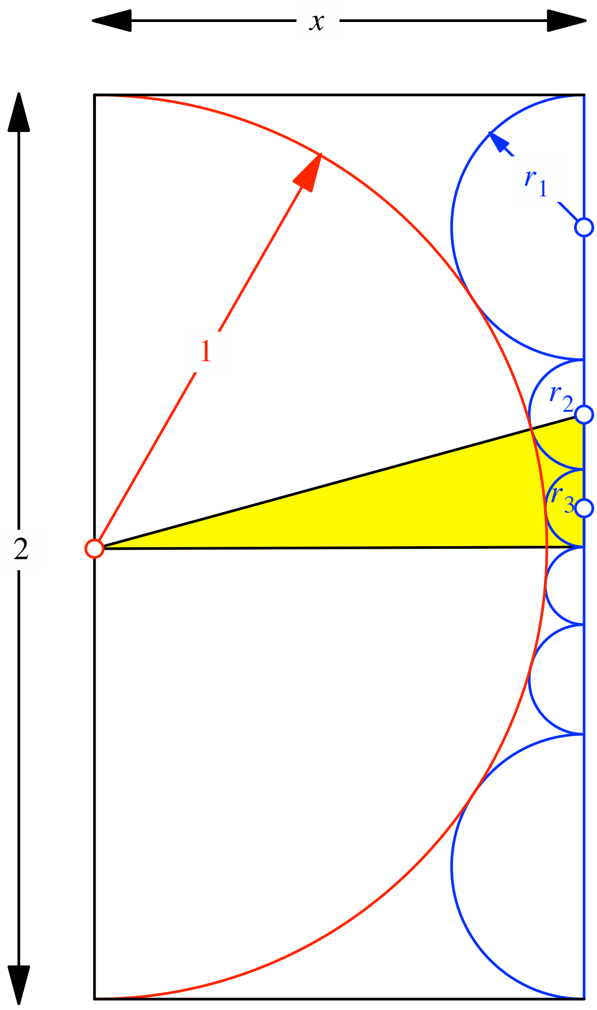

Abb. 3: Maße und Bezeichnungen

Gesucht sind die $m + 1$ Werte $x, r_1, \ldots, r_m$. Zunächst haben wir die Bedingung:

$$2\sum_{k=1}^{m} r_k = 1 \tag{1}$$

Im gelb eingezeichneten Dreieck ergibt sich exemplarisch die Bedingung:

$$\left(1 - 2\sum_{j=1}^{2} r_j + r_2\right)^2 + x^2 = \left(1 + r_2\right)^2 \tag{2}$$

Allgemein erhalten wir m Bedingungen der Form:

$$\left(1-2\sum_{j=1}^{k} r_j + r_k\right)^2 + x^2 = \left(1+r_k\right)^2; \quad k=1,\ldots,m \qquad (3)$$

Mit (1) und (3) haben wir $m + 1$ Bedingungen für die gesuchten $m + 1$ Unbekannten. Wegen den Quadraten in (3) führt das zu Gleichungen höheren Grades.

4.2 Ungerade Anzahl von blauen Halbkreisen

Es sei $n = 2m - 1$. Statt der Bedingung (1) erhalten wir die Bedingung:

$$2\sum_{k=1}^{m} r_k - r_m = 1 \qquad (4)$$

Die Bedingung (3) bleibt unverändert.

5 Grenzfall

5.1 Radien

Im Grenzfall von unendlich vielen blauen Halbkreisen ist $x = 1$ (Abb. 4). Das vereinfacht die Sache. Der erste Radius lässt sich „von Hand" ausrechnen. Es ist:

$$r_1 = \tfrac{1}{4} \qquad (5)$$

Das gelb eingezeichnete rechtwinklige Dreieck ist das „Lehrerdreieck" mit dem Seitenverhältnis 4:3:5.

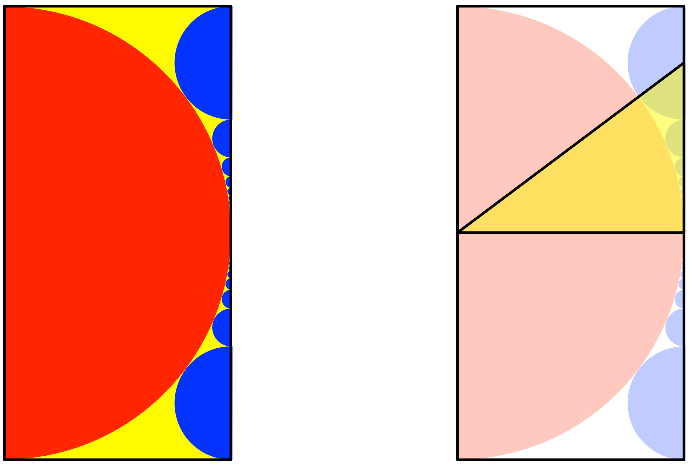

Abb.4: Grenzfall. Lehrerdreieck

Die „Dreiecksbedingung“ (3) kann jetzt für das Dreieck $k + 1$ in der Form geschrieben werden:

$$\left(1+r_{k+1}\right)^2 = 1 + \left(1 - 2\left(\sum_{j=1}^{k} r_j\right) - r_{k+1}\right)^2 \tag{6}$$

Dies lässt sich umformen zur Rekursion:

$$r_{k+1} = \frac{\left(1-2\sum_{j=1}^{k} r_j\right)^2}{4-4\sum_{j=1}^{k} r_j} \tag{7}$$

Die Radien sind also wurzelfrei und damit rational. Die Tabelle 1 gibt die ersten 10 Radien.

k	r_k	$r_k \,/\, r_{k-1}$	bereinigt
1	1/4		
2	1/12	1/3	1/3
3	1/24	1/2	2/4
4	1/40	3/5	3/5
5	1/60	2/3	4/6
6	1/84	5/7	5/7
7	1/112	3/4	6/8
8	1/144	7/9	7/9
9	1/180	4/5	8/10
10	1/220	9/11	9/11

Tab. 1: Radien. Radienverhältnisse

Interessant sind auch die Radienverhältnisse. Damit lässt sich die Rekursion viel einfacher schreiben:

$$\begin{aligned} r_1 &= \tfrac{1}{3} \\ r_k &= r_{k-1}\tfrac{k-1}{k+1} \end{aligned} \tag{8}$$

5.2 Pythagoreische Dreiecke

Das erste (in Abb. 4 gelb eingezeichnete) rechtwinklige Dreieck ist das pythagoreische Dreieck mit dem Seitenverhältnis 3:4:5 (im negativen Umlaufssinn).

Auch die weiteren Dreiecke sind pythagoreisch (Tab. 2, negativer Umlaufssinn). Es sind die echten Längen als rationale Zahlen wie auch die erweiterten Längen angegeben.

k	r_k	a_k	b_k	c_k	$\overline{a}_k$	$\overline{b}_k$	$\overline{c}_k$
1	1/4	1	3/4	5/4	3	4	5
2	1/12	1	5/12	13/12	5	12	13
3	1/24	1	7/24	25/24	7	24	25
4	1/40	1	9/40	41/40	9	40	41
5	1/60	1	11/60	61/60	11	60	61
6	1/84	1	13/84	85/84	13	84	85
7	1/112	1	15/112	113/112	15	112	113
8	1/144	1	17/144	145/144	17	144	145
9	1/180	1	19/180	181/180	19	180	181
10	1/220	1	21/220	221/220	21	220	221

Tab. 2: Pythagoreische Dreiecke

Wir erhalten die pythagoreischen Dreiecke, deren Hypotenuse um 1 größer ist als die längere der beiden Katheten. Die Folge der kürzeren Katheten sind die ungeraden Zahlen.

Literatur

Walser, Hans (2013a): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, Hans (2013b): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.

Weblinks

[1] Hans Walser: Kreise im silbernen Rechteck
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreise_i_s_R/Kreise_i_s_R.htm

[2] Hans Walser: Kreispackung
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreispackung/Kreispackung.htm