Hans Walser, [20210124]

Satz von Haga

Idee und Anregung: Alfred Hoehn, Basel

1 Worum geht es?

Herstellung pythagoreischer Dreiecke mittels Origamifalten

2 Erinnerung

Pythagoreische Dreiecke können wie folgt konstruiert werden: Es seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen ungleicher Parität mit $m > n$. Dann sind

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2 \tag{1}$$

die Seiten eines primitiven pythagoreischen Dreiecks.

Die Formeln (1) werden als *babylonische Formeln* bezeichnet.
Beispiele:

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41

Tab. 1: Beispiele

Bemerkung ohne Beweis: Mit den babylonischen Formeln können sämtliche pythagoreischen Dreiecke generiert werden.

3 Faltprozess

Die pythagoreischen Dreiecke lassen sich durch Origami-Falten herstellen. Wir illustrieren das Vorgehen exemplarisch für den Fall $m = 3$ und $n = 2$.

Aus einem Quadratraster schneiden wir ein $m \times m$-Quadrat (Abb. 1a). Am oberen Rand zählen wir von rechts her n Einheiten ab und falten die rechte untere Ecke auf diesen Punkt (Abb. 1b). Von der Oberseite der Quadratfläche bleiben zwei rechtwinklige Dreiecke sichtbar. Sie sind ähnlich (gleiche Winkel).

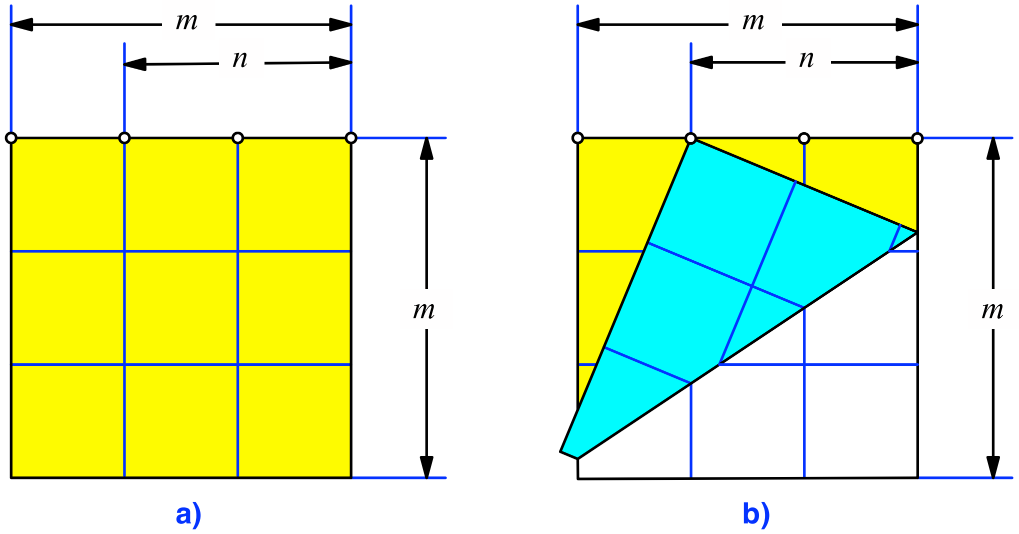

Abb. 1: Ecke Auffalten

Beides sind pythagoreische Dreiecke (Satz von Hages).

Das am linken Rand unten vorstehende kleine Schnipsel ist ähnlich zu den beiden Dreiecken und damit ebenfalls ein pythagoreisches Dreieck.

4 Beweis

Wir führen den Beweis für das rechtwinklige Dreieck rechts oben. Seine Seiten bezeichnen wir mit *x, y, z* (Abb. 2).

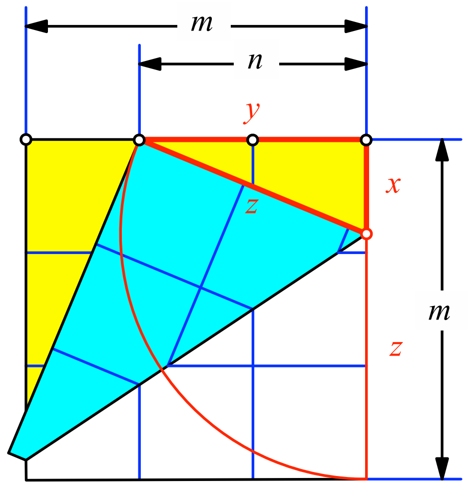

Abb. 2: Beweisfigur

Es ist:

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=z^2 && \text{Pythagoras} \\ y&=n && \text{gemäß Konstruktion} \\ x+z&=m && \text{rechter Rand} \end{aligned} \tag{2}$$

Das Gleichungssystem (3) hat für *x, y, z* die Lösungen (auf einen gemeinsamen Nenner gebracht):

$$x=\frac{m^2-n^2}{2m}, \quad y=\frac{2mn}{2m}, \quad z=\frac{m^2+n^2}{2m} \tag{3}$$

Somit ist:

$$x:y:z=\left(m^2-n^2\right):2mn:\left(m^2+n^2\right) \tag{4}$$

Wegen (1) hat das Dreieck die Form eines pythagoreischen Dreiecks. Dies war zu zeigen.

Literatur

Hoehn, Alfred und Huber, Martin (2005): Pythagoras. Erinnern Sie sich? Zürich, Orell Füssli-Verlag 2005. ISBN 3-280-04040-X

Hoehn, Alfred und Walser, Hans (2003): Gittergeometrie und pythagoreische Dreiecke. Praxis der Mathematik (5/45), 215-217.

Website

Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke falten
https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dr_falten/Pyth_Dr_falten.htm