

Hans Walser, [20190927]

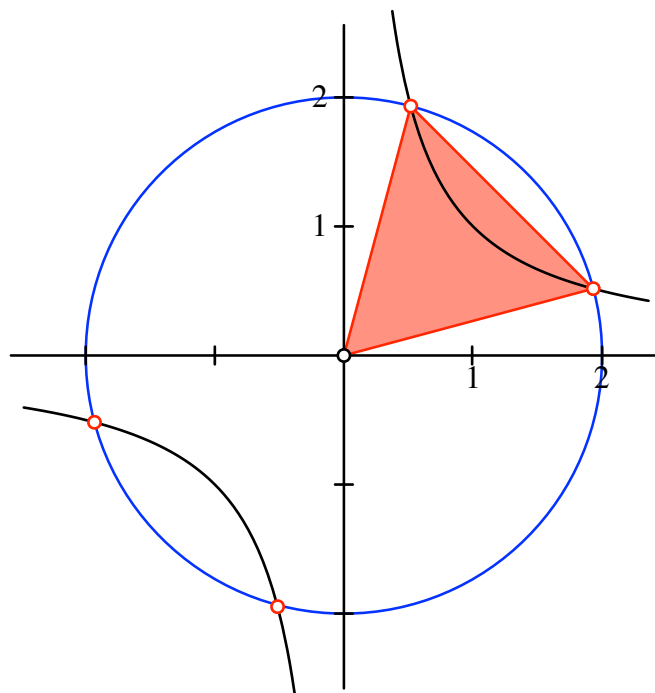
## Gleichseitiges Dreieck?

### 1 Problemstellung

Wir schneiden die Hyperbel

$$y = \frac{1}{x} \quad (1)$$

mit dem Kreis um den Ursprung und dem Radius 2 (Abb. 1). Die beiden Schnittpunkte im ersten Quadranten bilden zusammen mit dem Ursprung ein Dreieck. Ist dieses Dreieck gleichseitig?



**Abb. 1: Gleichseitiges Dreieck?**

### 2 Bearbeitung

Ein solcher Schnittpunkt hat den Polarabstand 2. Wir suchen den Polarwinkel  $\varphi$ . Der Schnittpunkt hat die kartesischen Koordinaten:

$$(2 \cos(\varphi), 2 \sin(\varphi)) \quad (2)$$

Wegen (1) gilt:

$$2 \sin(\varphi) = \frac{1}{2 \cos(\varphi)} \quad (3)$$

Die Beziehung (3) kann umgeformt werden (die Additionstheoreme sind immer wieder schön):

$$\begin{aligned} 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) &= \frac{1}{2} \\ \sin(2\varphi) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Die Gleichung (4) hat die Lösungen:

$$2\varphi_1 = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \quad , \quad 2\varphi_2 = 150^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

Daraus ergeben sich die vier Lösungen (plus Vielfache von  $360^\circ$ ):

$$\varphi = 15^\circ, \varphi = 75^\circ, \varphi = 195^\circ, \varphi = 255^\circ \quad (6)$$

Die ersten beiden Lösungen gehören zu unserem Dreieck im ersten Quadranten. Ihre Differenz ist  $60^\circ$ . Das Dreieck ist gleichseitig.