

Hans Walser, [20200203]

Geometrische Reihe

1 Worum geht es?

Illustrationen der geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3} \quad (1)$$

2 Rechteck

Das Wurzel-4-Rechteck ist das Rechteck mit dem Seitenverhältnis 2:1 (Abb. 1). Wir können es in vier kongruente, zum Startrechteck ähnliche Rechtecke unterteilen. Dabei muss von Querformat auf Hochformat gewechselt werden.

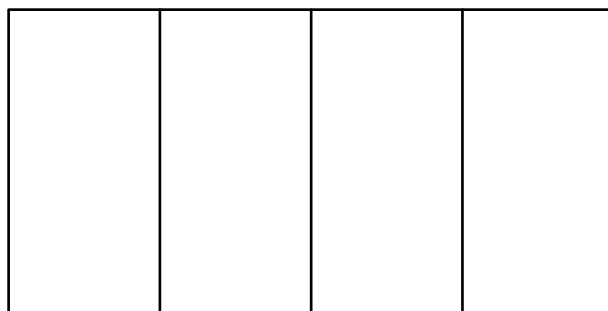


Abb. 1: Wurzel-4-Rechteck

Wir färben nun drei der vier Rechtecke, und lassen das vierte leer (Abb. 2).

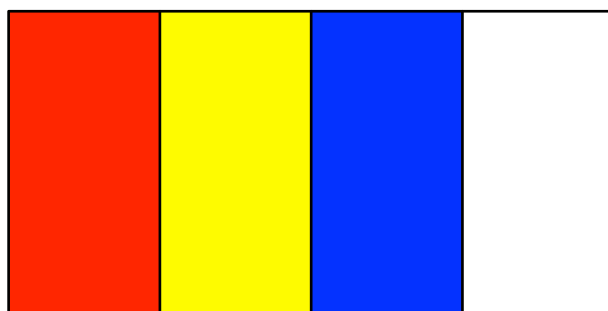


Abb. 2: Färbung

Das leere Feld füllen wir mit einer längenmäßig auf 50% verkleinerten und um $+90^\circ$ gedrehten Kopie der Gesamtfigur (Abb. 3).

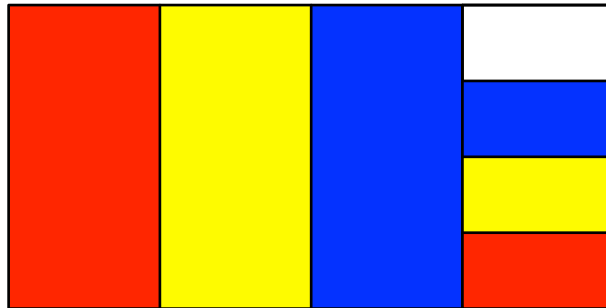


Abb. 3: Erster Schritt

Diesen Schritt wiederholen wir (Abb. 4).

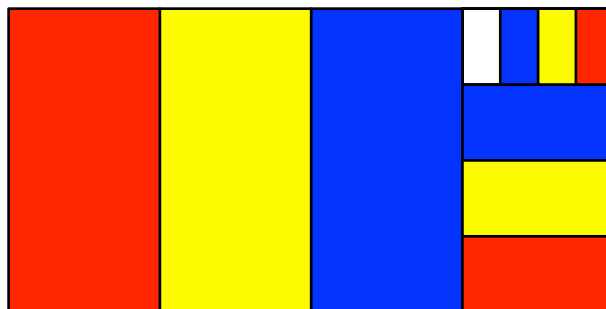


Abb. 4: Zweiter Schritt

Schließlich ist das ganze Startrechteck ausgefüllt (Abb. 5).

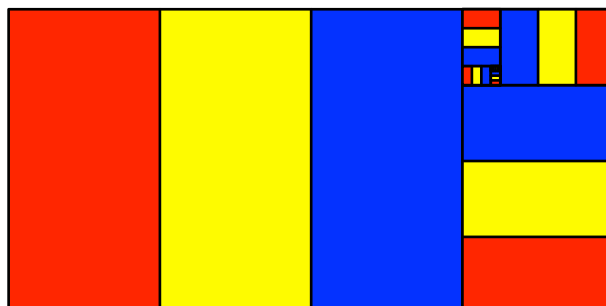


Abb. 5: Grenzfigur

Fokussierung auf zum Beispiel die roten Rechtecke illustriert (1).

Die Abbildung 6 zeigt eine Variante der Farbanordnung. Wir erkennen zumindest eine Spirale.

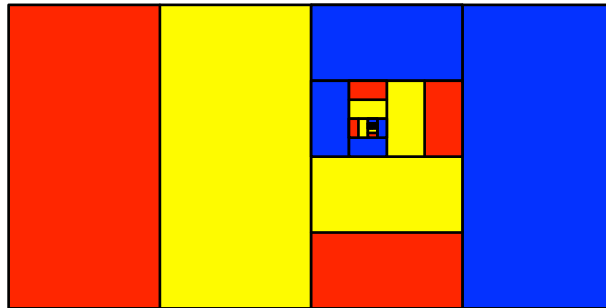


Abb. 6: Variante

3 Quadrat

Die Abbildungen 7 bis 10 zeigen einen Klassiker. Wir vierteln ein Quadrat gemäß Abbildung 7 und füllen drei der vier Viertel mit Farbe (Abb. 8).

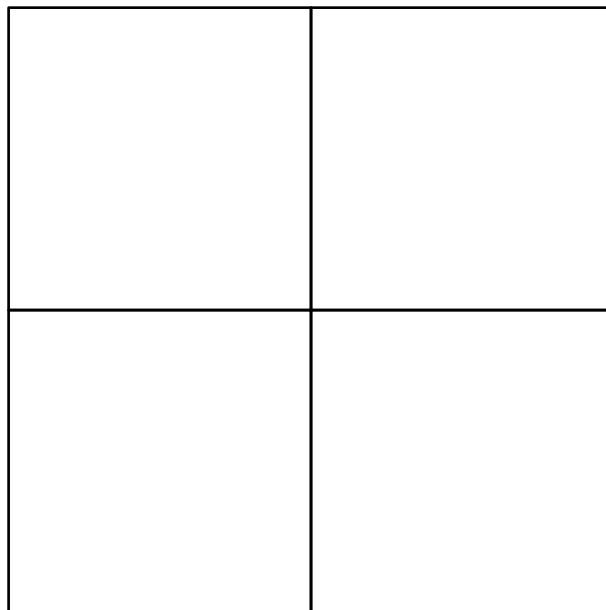


Abb. 7: Viertel des Quadrates

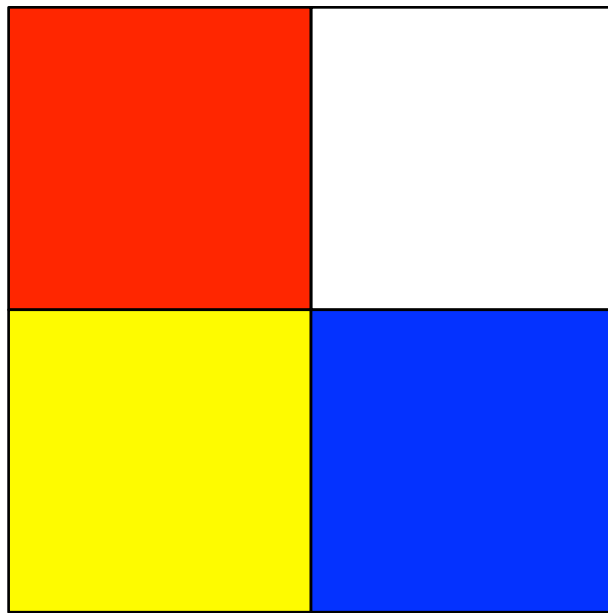


Abb. 8: Drei Viertel gefärbt

Das leere Feld füllen wir mit einer längenmäßig auf 50% verkleinerten Kopie der Gesamtfigur (Abb. 9).

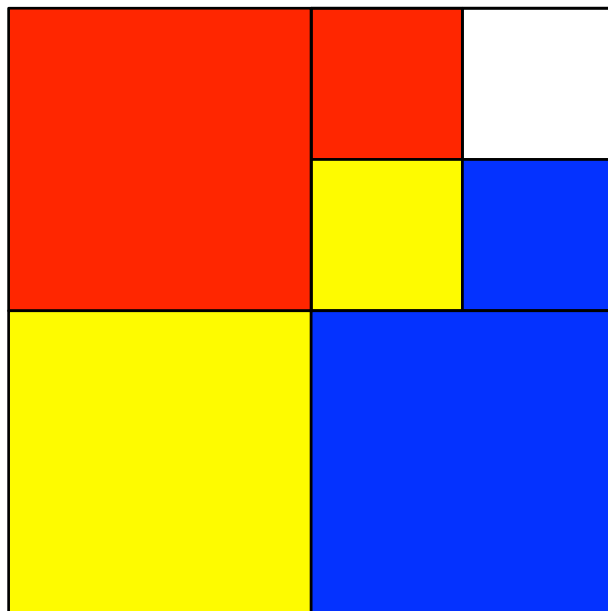


Abb. 9: Erster Schritt

Iteration führt zum Klassiker der Abbildung 10. Der Grenzpunkt ist rechts oben.

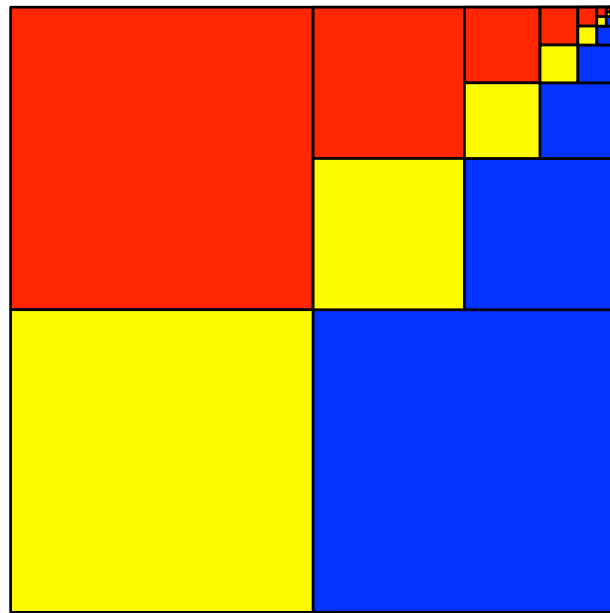


Abb. 10: Klassiker

Wenn wir nicht nur verkleinern, sondern bei jedem Schritt auch um $+90^\circ$ drehen, ergibt sich die Variante der Abbildung 11. Wir erkennen zumindest eine Spirale. Wo ist der Grenzpunkt?

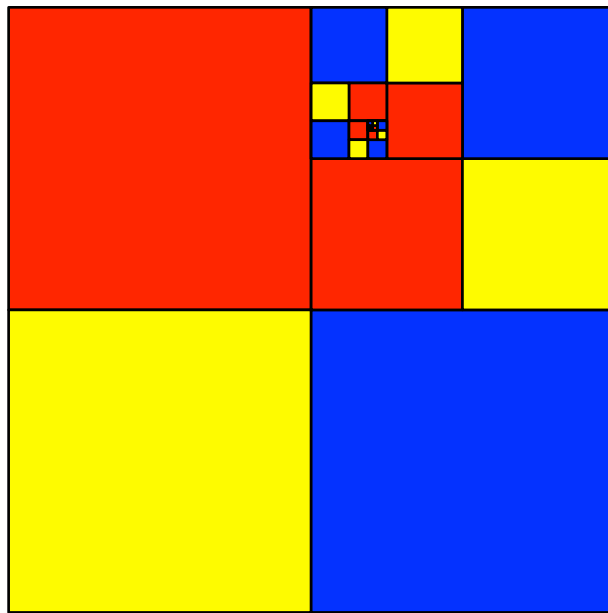


Abb. 11: Variante

Wenn wir bei jedem Schritt um 180° drehen, ergibt sich die Variante der Abbildung 12. Hier ist die Position des Grenzpunktes leicht zu bestimmen. Wenn wir von rechts und von oben her arbeiten, kommen wir wiederum zu (1), diesmal längenmäßig.

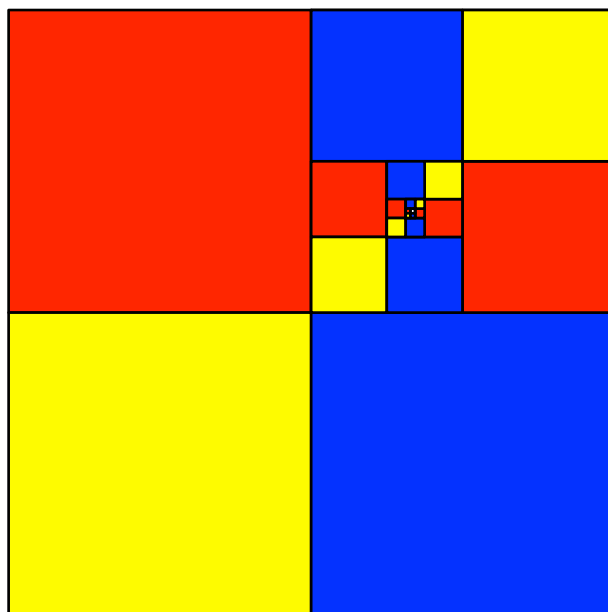


Abb. 12: Noch eine Variante

Durch geeignete Organisation der Verteilung kann jeder Punkt im inneren und auf dem Rand des Startquadrates als Grenzpunkt erhalten werden (Algorithmus der Katze, die um den heißen Brei schleicht).

4 Dreieck

4.1 Klassische Unterteilung

Wir beginnen mit der klassischen Unterteilung gemäß Abbildung 13.

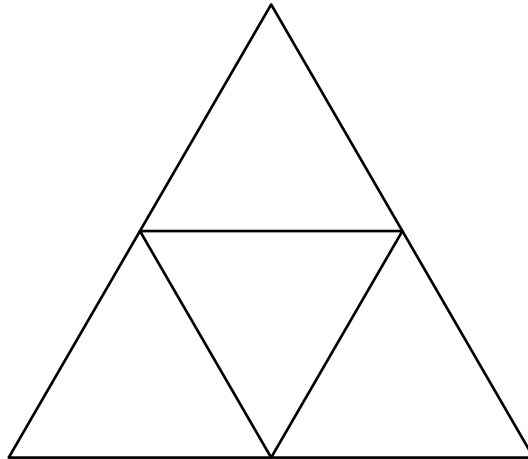


Abb. 13: Klassische Unterteilung

Mit der Färbung der Abbildung 14 ergibt sich schließlich die Figur der Abbildung 15. Diese erinnert an die Abbildung 10.

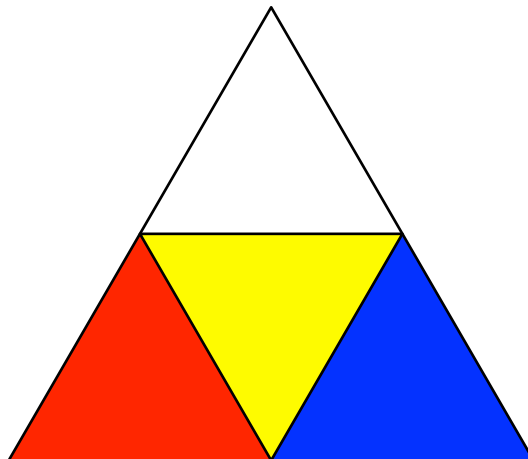


Abb. 14: Färbung

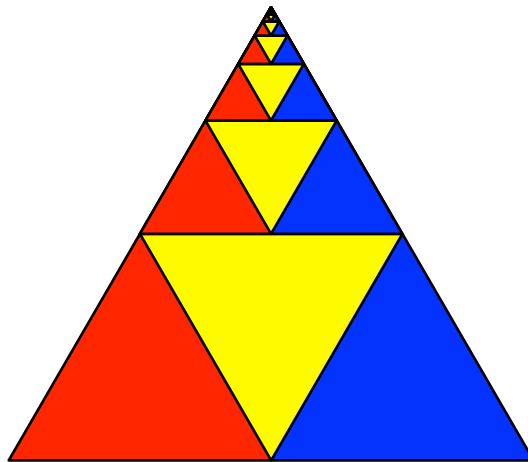


Abb. 15: Grenzfigur

Mit der Färbung gemäß Abbildung 16 können wir drei ineinanderlaufende Spiralen konstruieren (Abb. 17).

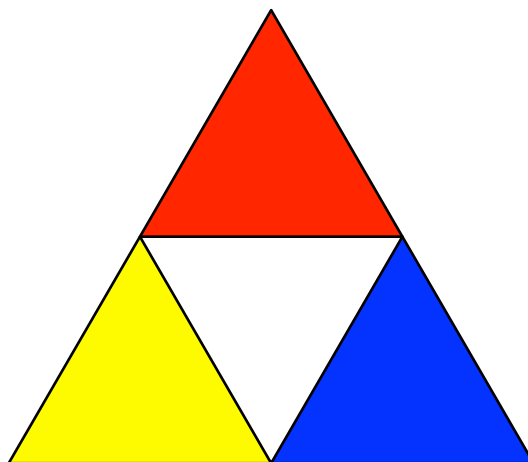


Abb. 16: Andere Färbung

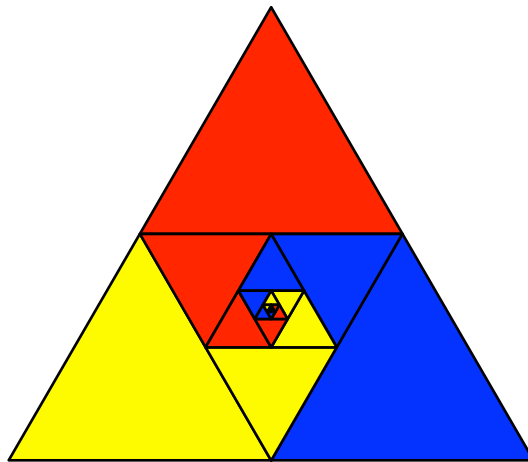


Abb. 17: Spiralen

Mit der Färbung der Abbildung 16 können wir aber auch anders verfahren (Abb. 18). Jede Farbe hat nun ihre Symmetrieachse.

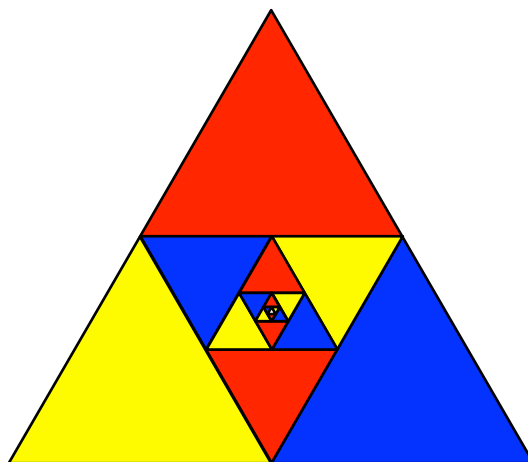


Abb. 18: Variante

4.2 Rasterung

Wir versehen das Dreieck mit einer 6×6 -Rasterung (Abb. 19). Im rot markierten zentralen Dreieck befinden sich neun der insgesamt 36 Rasterdreiecke, ein Viertel also.

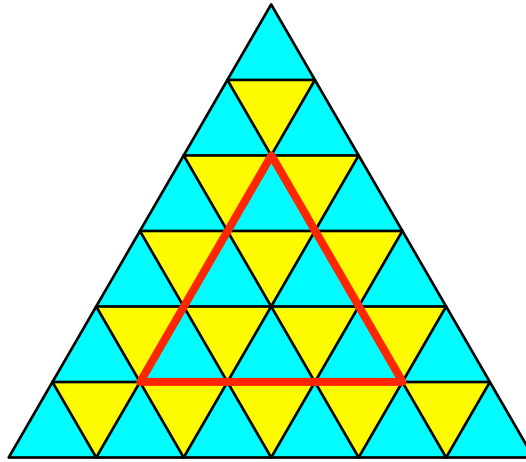


Abb. 19: Rasterung

Die Zwischenfläche zwischen dem roten Dreieck und dem Startdreieck zerlegen wir in drei flächengleiche Teile (Abb. 20). Diese haben ebenfalls je neun Rasterdreiecke.

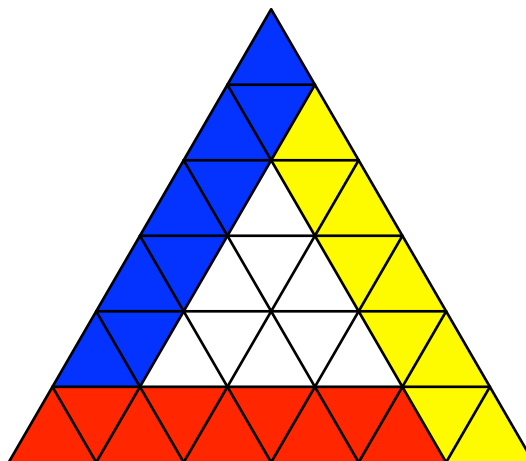


Abb. 20: Flächengleiche Teile

Im Folgenden lassen wir die Rasterdreiecke weg. Das leere zentrale Dreieck füllen wir mit einer längenmäßig auf 50% verkleinerten und um $+120^\circ$ gedrehten Kopie der Gesamtfigur (Abb. 21). Wir sehen den Beginn von drei Spiralen.

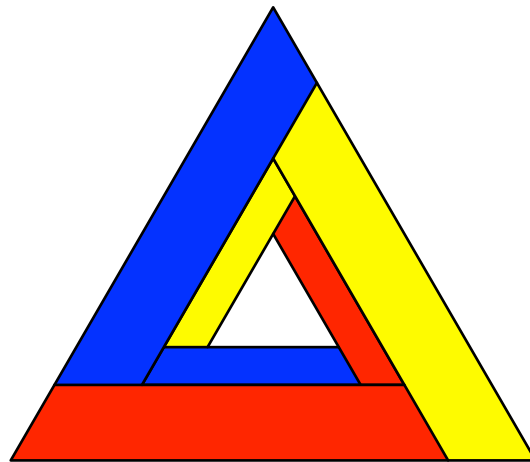


Abb. 21: Erster Schritt

Die Abbildung 22 zeigt die Grenzfigur.

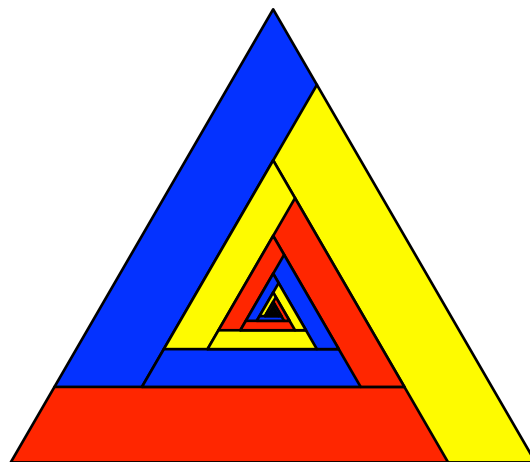


Abb. 22: Spiralen

4.3 Goldener Schnitt

Wir zerlegen das Dreieck gemäß Abbildung 23. Die drei markierten Punkte liegen im Verhältnis des Goldenen Schnittes (Walser 2013). Das zentrale gleichseitige Dreieck ist flächenmäßig ein Viertel des Startdreieckes. Beweis rechnerisch.

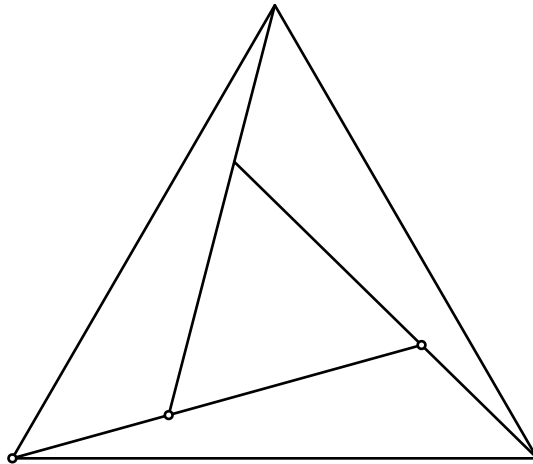


Abb. 23: Zerlegung mit dem Goldenen Schnitt

Die Außendreiecke sind flächenmäßig gleich groß wie das zentrale Dreieck. Wir färben die drei Außendreiecke (Abb. 24).

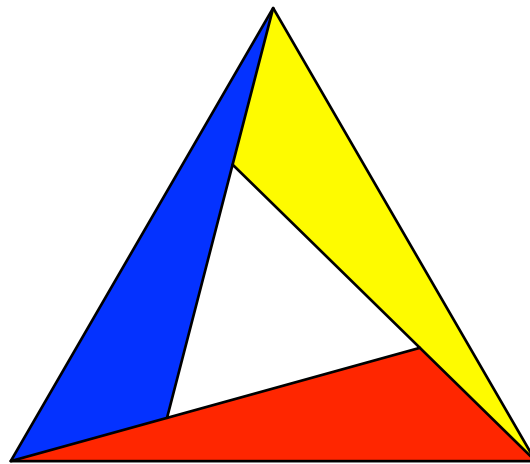


Abb. 24: Färbung

Das leere zentrale Dreieck füllen wir mit einer längenmäßig auf 50% verkleinerten und geeignet gedrehten Kopie der Gesamtfigur (Abb. 25). Wir sehen den Beginn von drei Spiralen.

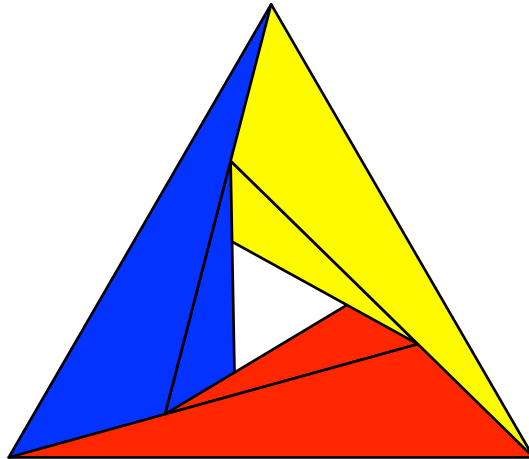


Abb. 25: Erster Schritt

Die Abbildung 26 zeigt die Grenzfigur.

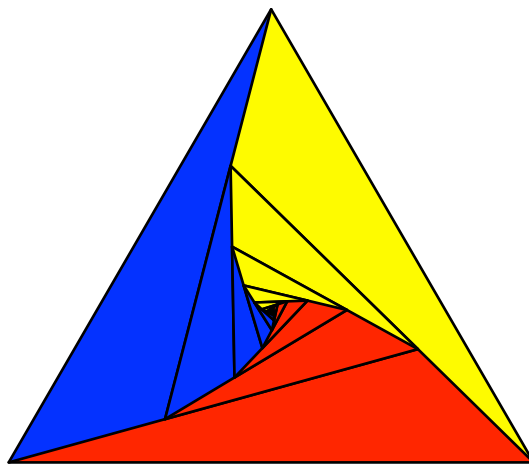


Abb. 26: Grenzfigur

Websites

Hans Walser: Geometrische Reihe

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/G/Geom_Reihe2/Geom_Reihe2.htm

Literatur

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.