Hans Walser, [20191125]

Folgen pythagoreischer Dreiecke

1 Der Sachverhalt

Es sei $\left(a_n, b_n, c_n\right)$ ein pythagoreisches Tripel. Es handelt sich also um natürlich Zahlen mit der Eigenschaft:

$$a_n^2 + b_n^2 = c_n^2 \tag{1}$$

Weiter seien $\left(u_n, v_n\right)$ die zugehörigen Parameter. Es ist also:

$$a_n = u_n^2 - v_n^2, \quad b_n = 2u_n v_n, \quad c_n = u_n^2 + v_n^2 \tag{2}$$

Dann gilt folgendes. Die drei Zahlen

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + b_n + 2c_n \\ c_{n+1} &= 2a_n + 2b_n + 3c_n \end{aligned} \tag{3}$$

bilden ebenfalls ein pythagoreisches Tripel. Beweis durch Nachrechnen (vgl. [1]).
Weiter ist:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + v_n \\ v_{n+1} &= u_n \end{aligned} \tag{4}$$

Aus (4) ergibt sich unmittelbar:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + u_{n-1} \\ v_{n+1} &= 2v_n + v_{n-1} \end{aligned} \tag{5}$$

Die beiden Parameter bilden also je eine verallgemeinerte Fibonacci-Folge mit derselben Rekursion.

2 Beispiele

2.1 Das Lehrerdreieck

Wir beginnen mit dem Starttripel:

$$(a_1, b_1, c_1) = (3, 4, 5) \tag{6}$$

Die Tabelle 1 zeigt die ersten Werte der Folge gemäß (3) und (4).

n	a_n	b_n	c_n	$\frac{c_n}{a_n}$	u_n	v_n	$\frac{u_n}{v_n}$
1	3	4	5	1.666666667	2	1	2.
2	21	20	29	1.380952381	5	2	2.5
3	119	120	169	1.420168067	12	5	2.4
4	697	696	985	1.413199426	29	12	2.416666667
5	4059	4060	5741	1.414387780	70	29	2.413793103
6	23661	23660	33461	1.414183678	169	70	2.414285714
7	137903	137904	195025	1.414218690	408	169	2.414201183
8	803761	803760	1136689	1.414212683	985	408	2.414215686
9	4684659	4684660	6625109	1.414213713	2378	985	2.414213198
10	27304197	27304196	38613965	1.414213536	5741	2378	2.414213625

Tab. 1: Erste Werte

Die zu den Tripeln gehörenden Dreiecke nähern sich einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck an. Die beiden Kathetenlängen unterscheiden sich immer nur um 1.
Wir vermuten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = \sqrt{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \sqrt{2} \tag{7}$$

In der Tabelle 2 sind die Zuwachsfaktoren angegeben.

n	$\frac{a_{n+1}}{a_n}$	$\frac{b_{n+1}}{b_n}$	$\frac{c_{n+1}}{c_n}$
1	7.	5.	5.8
2	5.666666667	6.	5.827586207
3	5.857142857	5.8	5.828402367
4	5.823529412	5.833333333	5.828426396
5	5.829268293	5.827586207	5.828427103
6	5.828282828	5.828571429	5.828427124
7	5.828451883	5.828402367	5.828427125
8	5.828422877	5.828431373	5.828427125
9	5.828427854	5.828426396	5.828427125
10	5.828427000	5.828427250	5.828427125

Tab. 2: Zuwachsfaktoren

Wir vermuten:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=3+2\sqrt{2} \tag{8}$$

Die Abbildung 1 illustriert (3) beim Übergang von $n = 1$ zu $n = 2$, also beim Übergang vom 3:4:5-Dreieck zum 21:20:29-Dreieck.

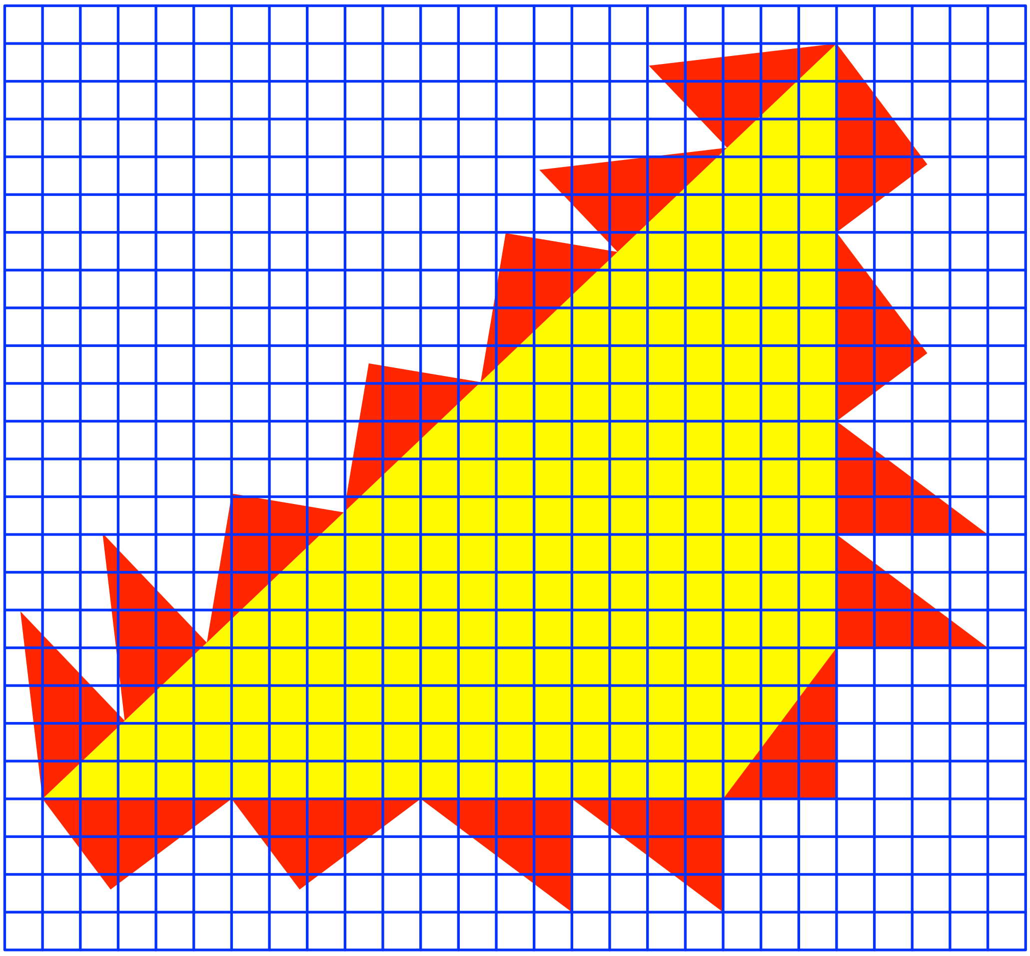

Abb. 1: Illustration

Man kann es auch dramatischer gestalten (Abb. 2).

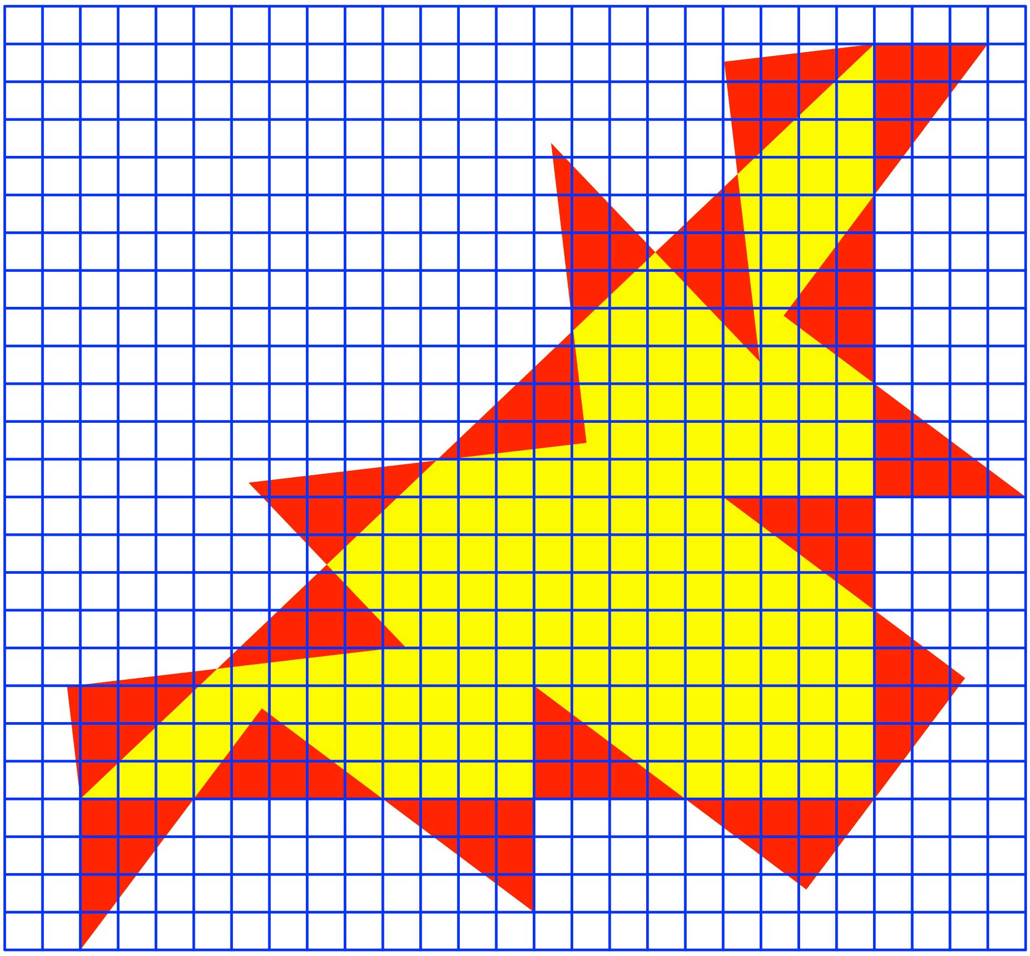

Abb. 2: Dramatische Variante

2.2 Dreieck 5:12:13

Die Tabelle 3 zeigt die ersten Werte der Folge gemäß (3) und (4).

n	a_n	b_n	c_n	$\frac{c_n}{a_n}$	u_n	v_n	$\frac{u_n}{v_n}$
1	5	12	13	2.6	3	2	1.5
2	55	48	73	1.327272727	8	3	2.666666667
3	297	304	425	1.430976431	19	8	2.375000000
4	1755	1748	2477	1.411396011	46	19	2.421052632
5	10205	10212	14437	1.414698677	111	46	2.413043478
6	59503	59496	84145	1.414130380	268	111	2.414414414
7	346785	346792	490433	1.414227836	647	268	2.414179104
8	2021235	2021228	2858453	1.414211114	1562	647	2.414219474
9	11780597	11780604	16660285	1.414213983	3771	1562	2.414212548
10	68662375	68662368	97103257	1.414213490	9104	3771	2.414213736

Tab. 3: Erste Werte

Wir vermuten wiederum (7). Die zu den Tripeln gehörenden Dreiecke nähern sich ebenfalls einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck an. Die beiden Kathetenlängen unterscheiden sich immer nur um 7.

Die Tabelle 4 gibt die Zuwachsfaktoren.

n	$\frac{a_{n+1}}{a_n}$	$\frac{b_{n+1}}{b_n}$	$\frac{c_{n+1}}{c_n}$
1	11.	4.	5.615384615
2	5.4	6.333333333	5.821917808
3	5.909090909	5.750000000	5.828235294
4	5.814814815	5.842105263	5.828421478
5	5.830769231	5.826086957	5.828426959
6	5.828025478	5.828828829	5.828427120
7	5.828496042	5.828358209	5.828427125
8	5.828415301	5.828438949	5.828427125
9	5.828429153	5.828425096	5.828427125
10	5.828426777	5.828427473	5.828427125

Tab. 4: Zuwachsfaktoren

Wir vermuten wiederum (8).

3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Rekursion (3) verwendet die symmetrische Matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte und exemplarischen Eigenvektoren:

$$-1, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad 3+2\sqrt{2}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad 3-2\sqrt{2}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Beim wiederholten Anwenden der Rekursion (3) nähern sich die Daten dem Fall mit dem betragsmäßig größten Eigenwert, also $3+2\sqrt{2}$ an. Damit ist die Vermutung (8) bewiesen.

Der zu diesem betragsmäßig größten Eigenwert gehörende Eigenvektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{11}$$

beschreibt das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck mit den Kathetenlängen 1 und der Hypotenusenlänge $\sqrt{2}$. Das ist natürlich kein pythagoreisches Dreieck mehr. Wenn wir es trotzdem als Startdreieck nehmen, bleibt die Dreiecksfolge formmäßig stabil. Wir erhalten rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke, die schrittweise mit dem Faktor $3+2\sqrt{2}$, dem Eigenwert also, gestreckt werden. Die Abbildung 3 zeigt den ersten Schritt. Die Rechnung gemäß (3) lässt sich auch grafisch verifizieren (der Erklärungsraster ist aber *kein* Quadratraster).

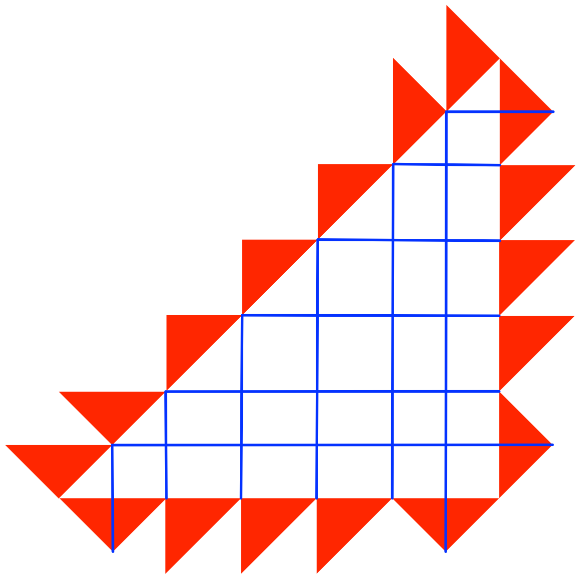

Abb. 3: Eigenvektor und Bild des Eigenvektors

Die Rekursion (4) arbeitet mit der Matrix U:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Diese Matrix U hat die Eigenwerte und exemplarischen Eigenvektoren:

$$1+\sqrt{2},\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad 1-\sqrt{2},\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

Beim wiederholten Anwenden der Rekursion (4) nähern sich die Daten dem Fall mit dem betragsmäßig größten Eigenwert, also $1+\sqrt{2}$ an. Damit ist die Vermutung (8) bewiesen. Damit lässt sich de zweite Teil der Vermutung (7) beweisen. Der Beweis lässt sich auch mit allgemeinen Überlegungen bei Fibonacci-Folgen führen (Walser 2012).

Literatur

Walser, Hans (2012): Fibonacci. Zahlen und Figuren. Leipzig, EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-60-8.

Weblinks

[1] Hans Walser: Pythagoras-Puzzle
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagoras-Puzzle/Pythagoras-Puzzle.htm
[2] Hans Walser: Folge von pythagoreischen Dreiecken
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Folge_pyth_Dr/Folge_pyth_Dr.htm