Hans Walser, [20150835]

Fibonacci-Mauern

Anregung: R. H., L.

1 Die Klassische Fibonacci-Mauer

Die Fibonacci-Folge hat die Startwerte $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ und die Rekursion:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1}$$

Explizit in Zahlen:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \ldots \tag{2}$$

Wir bauen eine Zahlenmauer mit den Fibonacci-Zahlen in der Basis (Abb. 1).

```
                              2584
                           987   1597
                        377    610    987
                     144    233    377    610
                   55     89    144    233    377
                21     34     55     89    144    233
              8     13     21     34     55     89    144
           3      5      8     13     21     34     55     89
        1      2      3      5      8     13     21     34     55
     0      1      1      2      3      5      8     13     21     34
```

Abb. 1: Fibonacci-Mauer

Wir erkennen allerhand, zum Beispiel:

In den Schrägen parallel zum Dach rechts haben wir Ausschnitte aus der Fibonacci-Folge.

In den Schrägen parallel zum Dach links haben wir Ausschnitte aus der Folge die entsteht wenn wir von der Fibonacci-Folge nur jedes zweite Glied nehmen (Schrittlänge 2). Die Folge hat bei Nummerierung von unten nach oben die Rekursion:

$$G_{n+1} = 3G_n - G_{n-1} \tag{3}$$

Die senkrechten Spalten sind bei Nummerierung von unten nach oben Ausschnitte aus der Fibonacci-Folge mit Schrittlänge 3. Es gilt die Rekursion:

$$H_{n+1} = 4H_n + H_{n-1} \tag{4}$$

Über Fibonacci-Teilfolgen der Schrittlänge k siehe (Walser 2012, S. 55-57).

2 Negative Indizes

Wir setzen die Fibonacci-Folge nach links das heißt für negative Indizes kompatibel mit (1) fort (Tab. 1):

n	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
F_n	–8	5	–3	2	–1	1	0	1	1	2	3	5	8

Tab. 1: Negative Indizes

Die Fibonacci-Zahlen mit negativen Indizes haben alternierende Vorzeichen.
Es ist:

$$F_{-n} = -(-1)^n F_n \tag{5}$$

3 „Negative" Fibonacci-Mauer

Wir bauen eine Fibonacci-Mauer mit Fibonacci-Zahlen mit negativen Indizes in der Basis (Abb. 2). In der Basis haben die negativen Zahlen ein stärkeres Geweicht als die positiven Zahlen. Die Basissumme ist –12.

```
                                21
                            8       13
                        3       5       8
                    1       2       3       5
                0       1       1       2       3
           -1       1       0       1       1       2
       -3       2      -1       1       0       1       1
   -8       5      -3       2      -1       1       0       1
-21     13      -8       5      -3       2      -1       1       0
```

Abb. 2: „Negative" Fibonacci-Mauer

Wir sehen, dass wir bereits auf halber Höhe aus den negativen Zahlen heraus sind. Das Element an der Spitze ist das größte Element in der ganzen Mauer und das Negative vom kleinsten Element.

In den Schrägen parallel zum Dach rechts haben wir Ausschnitte aus der (erweiterten) Fibonacci-Folge.

In den Schrägen parallel zum Dach links haben die Rekursion (2).

4 Hoch- und Tiefbau

Die Abbildung 3 zeigt einen reduzierten Ausschnitt der Fibonacci-Mauer der Abbildung 1 in schwarz. In rot wurde ein passender Unterbau zugefügt.

```
                                  55
                              21      34
                           8      13      21
                       3       5       8      13
                   1       2       3       5       8
               0       1       1       2       3       5
          -1       1       0       1       1       2       3
      -3       2      -1       1       0       1       1       2
  -8       5      -3       2      -1       1       0       1       1
```

Abb. 3: Unterbau

Wir sehen, dass sich die Fibonacci-Folge mit negativen Indizes entwickelt.

Das ist allerdings nicht die einzige Lösung. Die Abbildung 4 zeigt eine weitere Lösung. Dabei wurde willkürlich jeweils mit 7 begonnen. Die Rekursion (1) gilt nicht mehr.

```
                                  55
                              21      34
                           8      13      21
                       3       5       8      13
                   1       2       3       5       8
               0       1       1       2       3       5
           7      -7       8      -7       9      -6      11
       7       0      -7      15     -22      31     -37      48
   7       0       0      -7      22     -44      75    -112     160
```

Abb. 4: Weitere Lösung

Es ist klar, dass es unendlich viele Lösungen gibt. Wir können jede Unterbauzeile mit einer beliebigen Zahl starten.

5 Modulo

5.1 Farbcode

Wir färben die Bausteine modulo k ein.

Die Abbildung 5.1 gibt den verwendeten Farbcode.

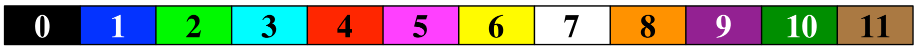

Abb. 5.1: Farbcode

Die Basis lassen wir in den folgenden Beispielen von $F_0 = 0$ bis $F_{12} = 144$ laufen. Das hat den Vorteil, dass 12 und 144 recht viele Teiler haben. Wenn die Modulzahl ein Teiler von 12 ist, haben wir schwarz in allen Ecken.

5.2 Modulo 2

Wir unterscheiden zwischen gerade (schwarz, 0) und ungerade (blau, 1).

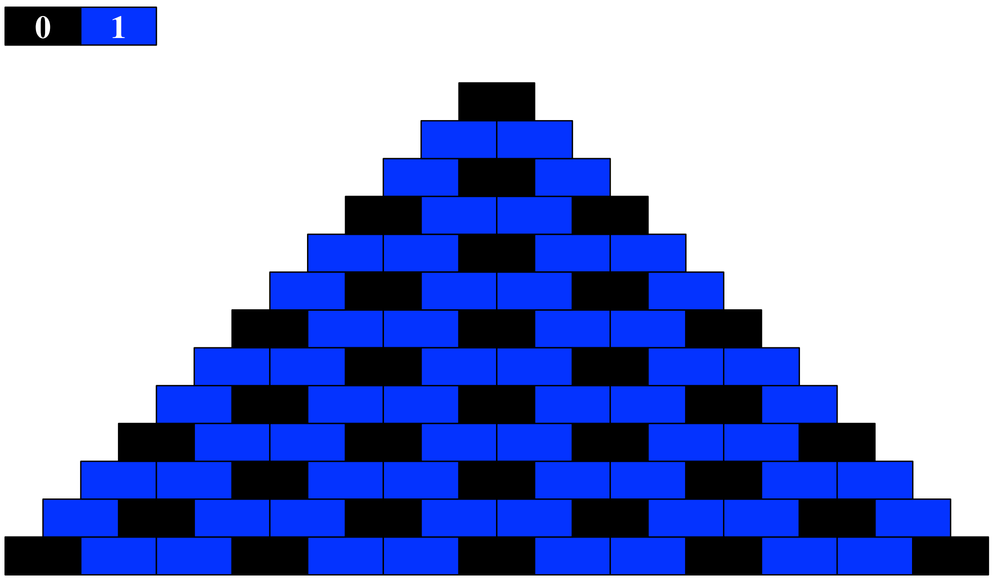

Abb. 5.2: Modulo 2

5.3 Modulo 3

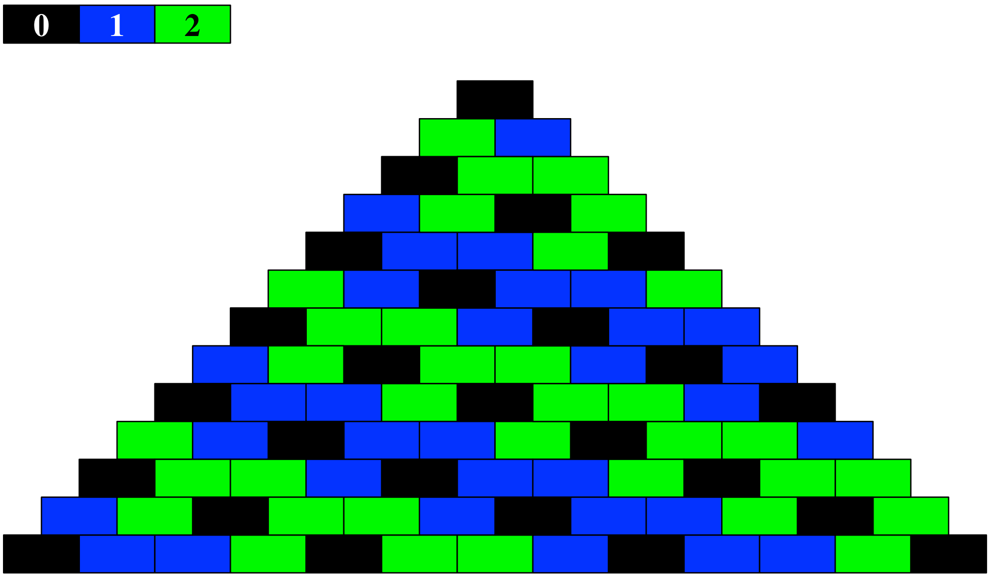

Abb. 5.3: Modulo 3

5.4 Modulo 4

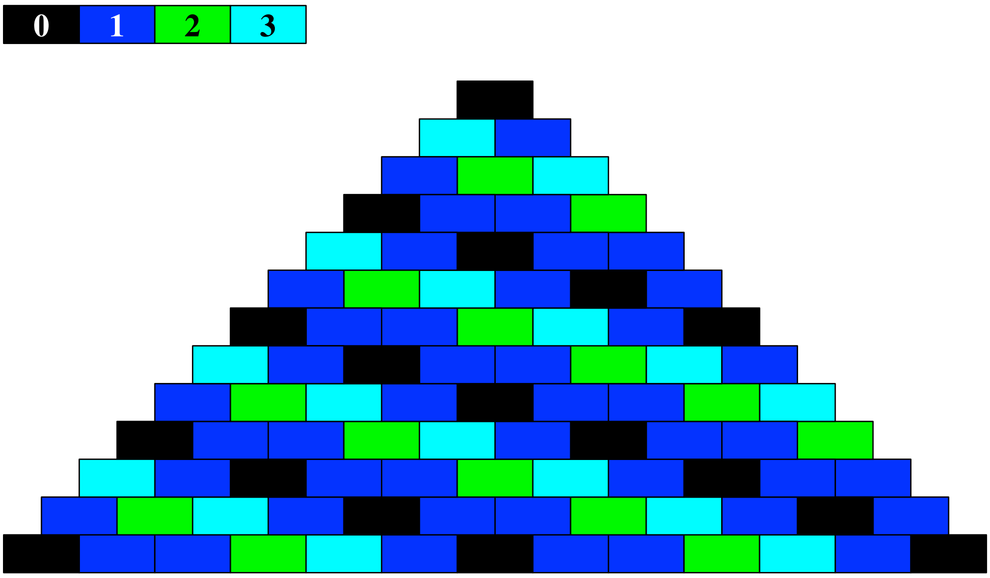

Abb. 5.4: Modulo 4

5.5 Modulo 5

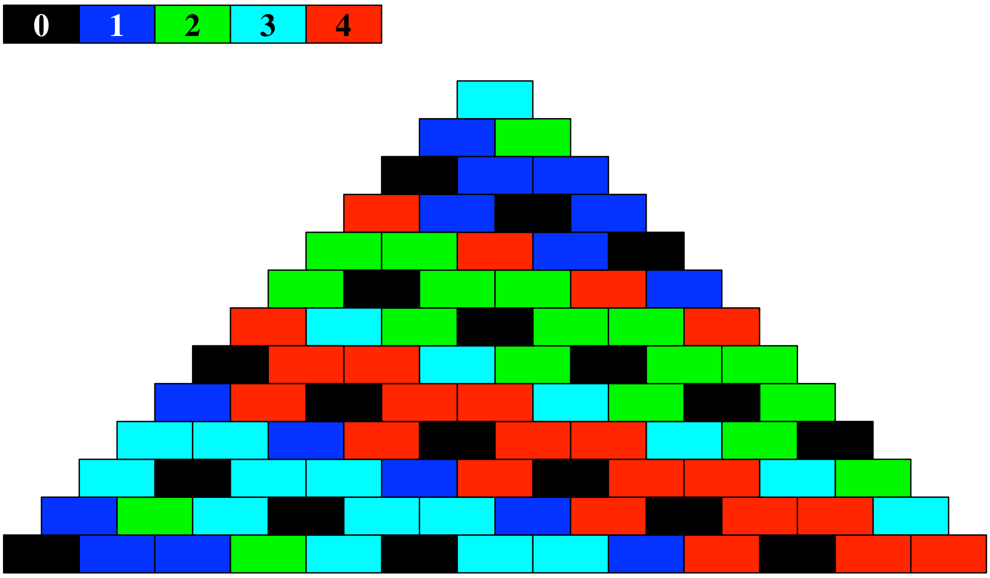

Abb. 5.5: Modulo 5

5.6 Modulo 6

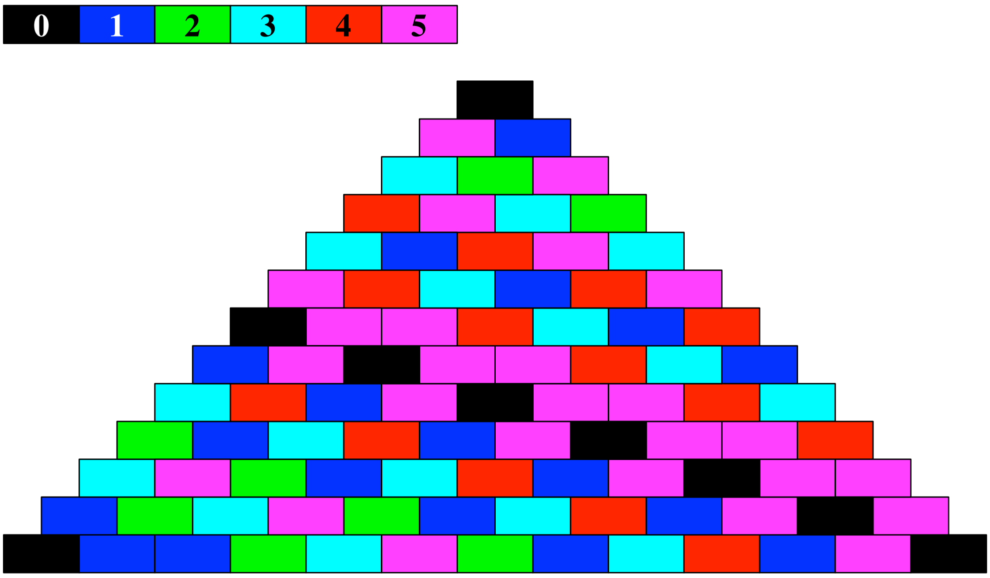

Abb. 5.6: Modulo 6

5.7 Modulo 7

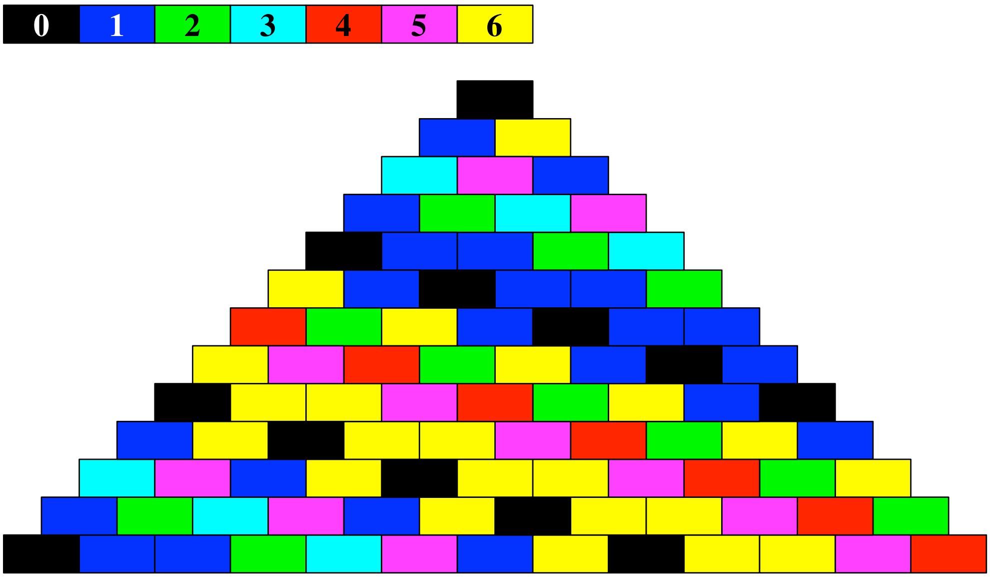

Abb. 5.7: Modulo 7

5.8 Modulo 8

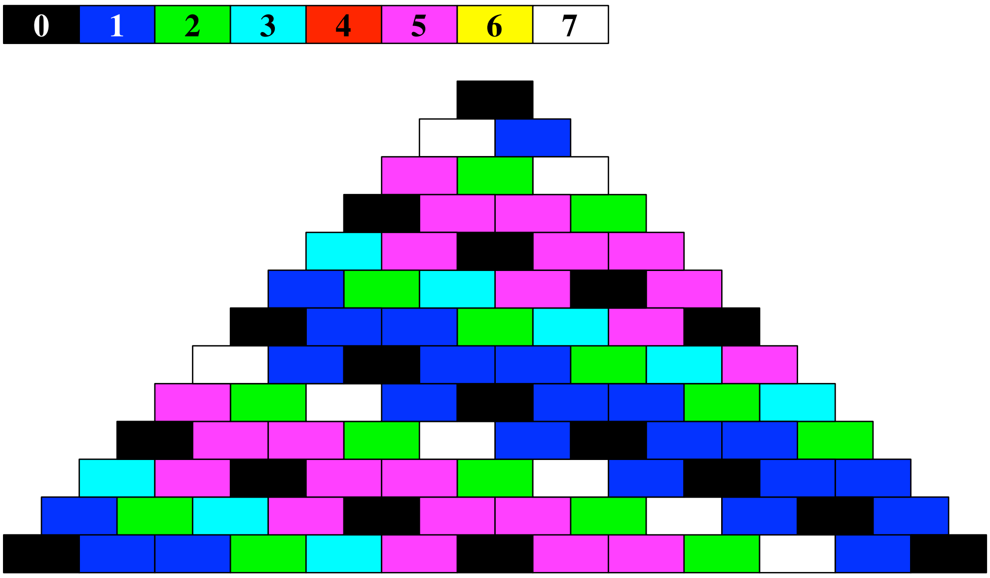

Abb. 5.8: Modulo 8

5.9 Modulo 9

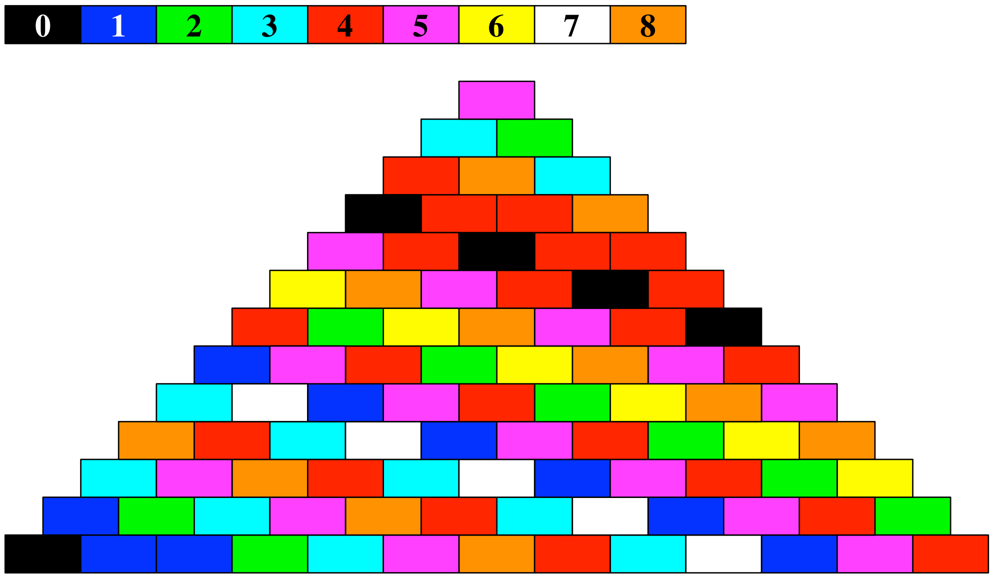

Abb. 5.9: Modulo 9

5.10 Modulo 10

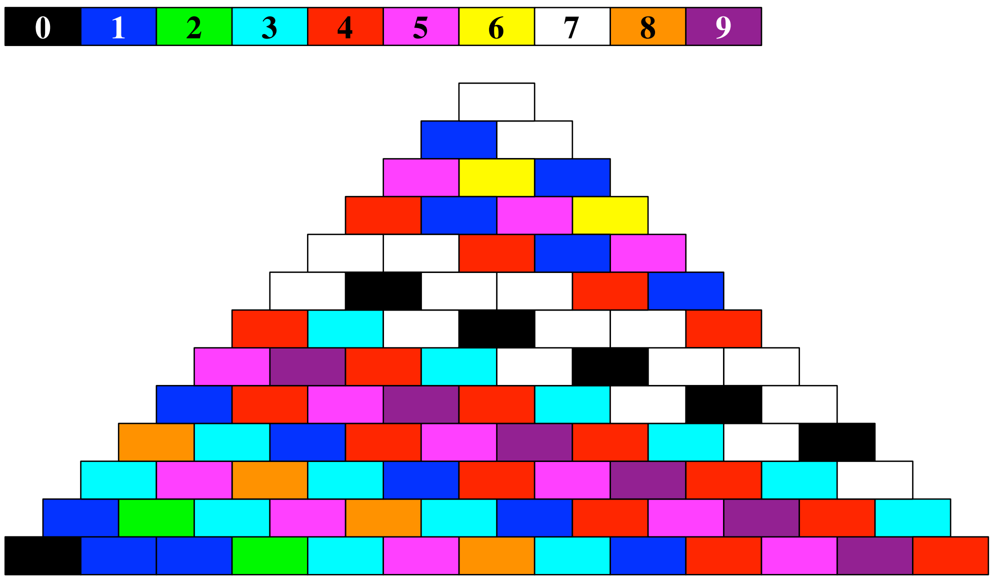

Abb. 5.10: Modulo 10

5.11 Modulo 11

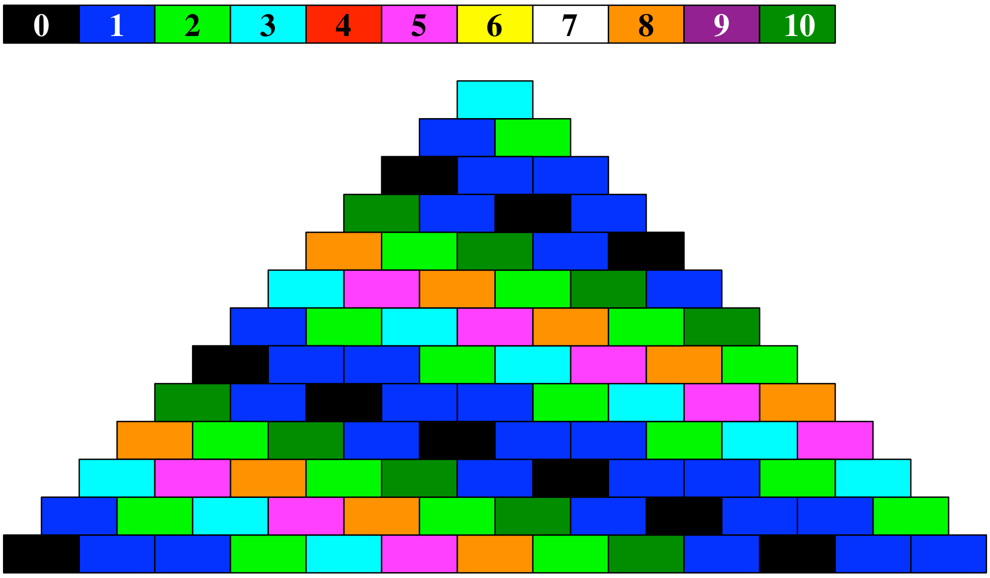

Abb. 5.11: Modulo 11

5.12 Modulo 12

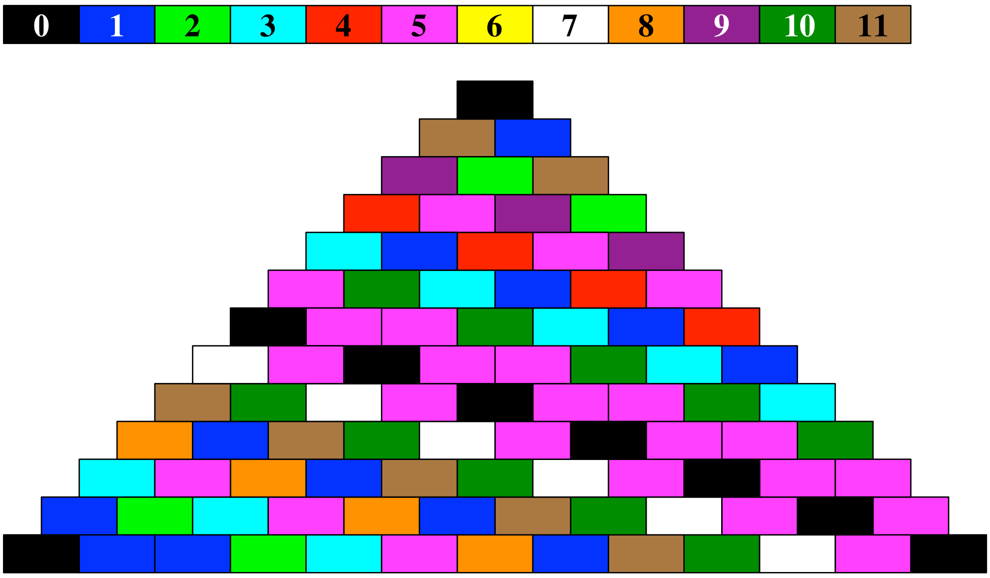

Abb. 5.12: Modulo 12

6 Fehlende Farben

In einigen Abbildungen 5.2 bis 5.11 fehlen einzelne Farben.

6.1 Modulo 8

Es fällt auf, dass in der Abbildung 5.8 die rote Farbe fehlt.

6.1.1 Vermutung

Es gibt kein F_n mit $F_n \bmod 8 = 4$.

Mit brute force für $n = 0, \ldots, 100'000$ verifiziert.

6.1.2 Beweis

Die Folge $G_n = F_n \bmod 8$ kann nur Werte aus $\{0,\ldots,7\}$ annehmen. Daher können Paare aufeinanderfolgender Folgenglieder (G_n, G_{n+1}) nur Werte aus $\{0,\ldots,7\} \times \{0,\ldots,7\}$ annehmen. Das sind 64 mögliche Wertepaare. Nach dem Schubfachprinzip von Dirichlet (pigeonhole principle) muss sich das Start-Wertepaar $(0,1)$ nach spätestens 64 Schritten wiederholen. Dann fängt die Periode an. Wir brauchen also nur die ersten 64 Folgenglieder von G_n durchzukämmen.

Tatsächlich wiederholt sich das Wertepaar $(0,1)$ schon eher (Tab. 2). Die Periodenlänge ist 11. In der Periode erscheint die Zahl 4 nicht.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
G_n	0	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1	0	1

Tab. 2: Modulo 8

6.2 Modulo 11

In der Abbildung 5.11 fehlen die Farben Rot, Weiß und Lila.

Vermutung: $F_n \bmod 11 \notin \{4,7,9\}$

Beweis analog 6.1.2. Wir haben die ersten 121 Werte zu untersuchen. Die Periode beginnt schon früher (Tab. 3).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_n \bmod 11$	0	1	1	2	3	5	8	2	10	1	0	1

Tab. 3: Modulo 11

In der Periode erscheint keine der Zahlen 4, 7, 9.

Über Fibonacci-Zahlen modulo k siehe (Walser 2012, S. 71-75).

Literatur

Walser, Hans (2012): *Fibonacci*. Zahlen und Figuren. Leipzig, EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-60-8.