Hans Walser, [20181205]

Fibonacci-Identität

1 Worum geht es?

Es wird eine mir bislang nicht bekannte Fibonacci-Identität gezeigt.

2 Die Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen werden in der Schreibweise F_n verwendet:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21

Tab. 1: Fibonacci-Zahlen

3 Eine bereits bekannte Identität

Es gilt:

$$F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n \tag{1}$$

Diese Identität soll bereits Kepler bekannt gewesen sein.
Aus (1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n &= F_{n+1}^2 - (-1)^n \\ F_{n+1}^2 &= F_{n+2}F_n + (-1)^n \end{aligned} \tag{2}$$

4 Die Identität

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_k F_{k+1}} = \frac{F_n}{F_{n+1}} \tag{3}$$

5 Beweis mit Induktion

5.1 Verankerung

Mit den Werten der Tabelle 1 erhalten wir:
Für $n = 1$ gilt:

$$\frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{1} \tag{4}$$

Für $n = 2$ gilt:

$$\frac{1}{1 \cdot 1} - \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

Für $n = 3$ gilt:

$$\frac{1}{1 \cdot 1} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \tag{6}$$

5.2 Induktionsschritt

Es gelte (3) für ein partikuläres n. Dann ist:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{F_k F_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_k F_{k+1}} + \frac{(-1)^{n+2}}{F_{n+1} F_{n+2}} = \frac{F_n}{F_{n+1}} + \frac{(-1)^n}{F_{n+1} F_{n+2}} \tag{7}$$

Weiter ist wegen (2):

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} + \frac{(-1)^n}{F_{n+1} F_{n+2}} = \frac{F_n F_{n+2} + (-1)^n}{F_{n+1} F_{n+2}} = \frac{F_{n+1}^2}{F_{n+1} F_{n+2}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \tag{8}$$

Damit ist (3) für alle n bewiesen.

6 Folgerung

Mit $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Goldener Schnitt) gilt (bekanntlich):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\Phi} \tag{9}$$

Wegen (3) gilt nun auch:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{F_k F_{k+1}} = \frac{1}{\Phi} \tag{10}$$