

Euler-Gerade

Anregung: W. G.

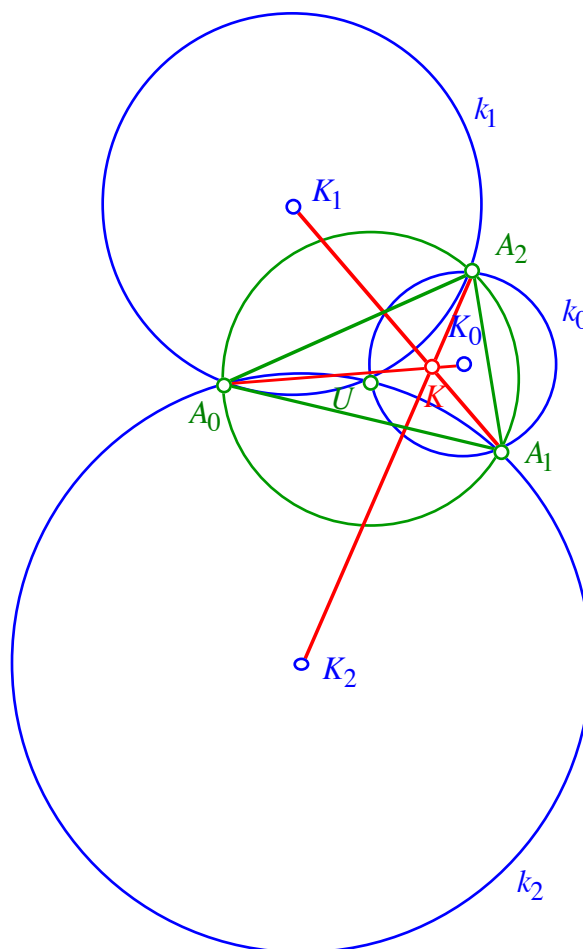
1 Worum geht es?

Es werden einige geometrische Eigenschaften vorgestellt, die auf einem beliebigen Punkt auf der Euler-Geraden basieren.

2 Ein Schnittpunkt

Zwei Geraden in allgemeiner Lage schneiden sich in einem Punkt. Wenn sich aber drei Geraden in demselben Punkt schneiden, ist das bemerkenswert. Spezielle Beispiele sind die drei Höhen eines Dreiecks oder die drei Schwerlinien oder die drei Winkelhalbierenden.

Einen weiteren Schnittpunkt können wir wie folgt finden: Wir zeichnen im Dreieck $A_0A_1A_2$ mit dem Umkreismittelpunkt U die drei Kreise k_i durch $A_{i+1}A_{i+2}U$ (Indizes immer aus $\{0,1,2\}$ und modulo 3) sowie deren Mittelpunkte K_i . Dann schneiden sich die drei Geraden A_iK_i in einem gemeinsamen Punkt K . Verifikation durch DGS.



Ein Schnittpunkt

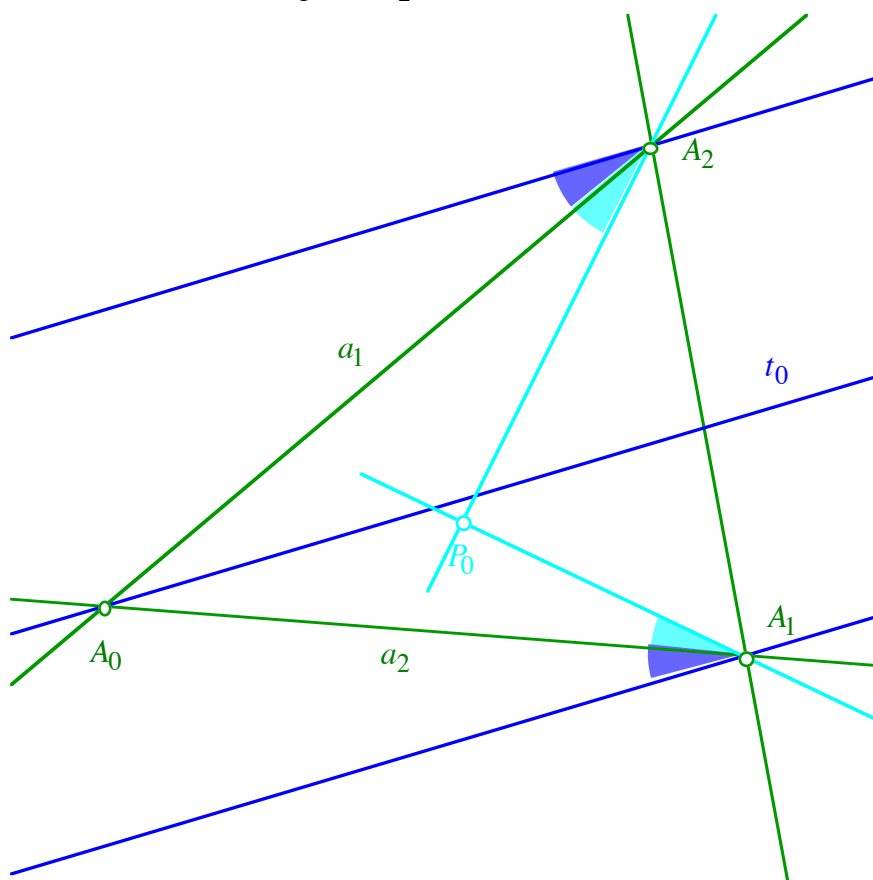
3 Ecktransversalen

Unter einer Ecktransversalen verstehen wir eine durch eine Dreiecksecke verlaufende Gerade. Spezielle Beispiele dazu sind Höhen, Schwerlinien und Winkelhalbierende.

In unserem Dreieck $A_0A_1A_2$ sei t_i eine durch die Ecke A_i verlaufende Ecktransversale.

3.1 Zuordnung eines Punktes

Zu einer beliebigen Ecktransversalen t_0 eines Dreieckes $A_0A_1A_2$ definieren wir einen Punkt P_0 wie folgt: Wir zeichnen Parallelen zu t_0 durch A_1 und A_2 und spiegeln diese an den Dreiecksseiten a_2 beziehungsweise a_1 . Der Schnittpunkt der gespiegelten Geraden ist P_0 . Der Punkt P_0 liegt im allgemeinen nicht auf der Ecktransversalen t_0 . Entsprechend könnend die Punkte P_1 und P_2 konstruiert werden.

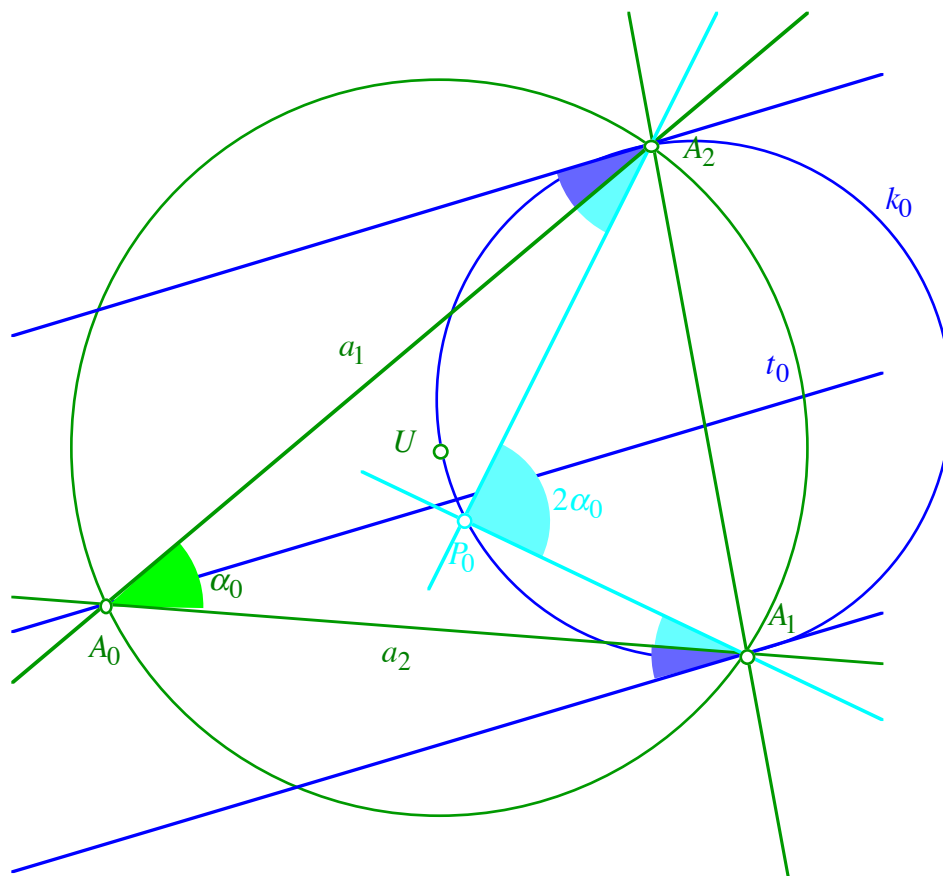


Konstruktion des Punktes

3.2 Vierpunkte-Kreise

Durch drei Punkte in allgemeiner Lage geht ein Kreis. Wenn aber vier Punkte auf einem Kreis liegen, ist das bemerkenswert. Das klassische Beispiel ist der Feuerbach-Kreis, auf dem sogar neun Punkte liegen.

Der Punkt P_0 liegt auf dem Kreis k_0 durch A_1 , A_2 und den Umkreismittelpunkt U . Der Kreis k_0 ist also ein Vierpunkte-Kreis. Dies ergibt sich aus Peripheriewinkelsätzen. Entsprechend für k_1 und k_2 .



Kreis durch den Umkreismittelpunkt

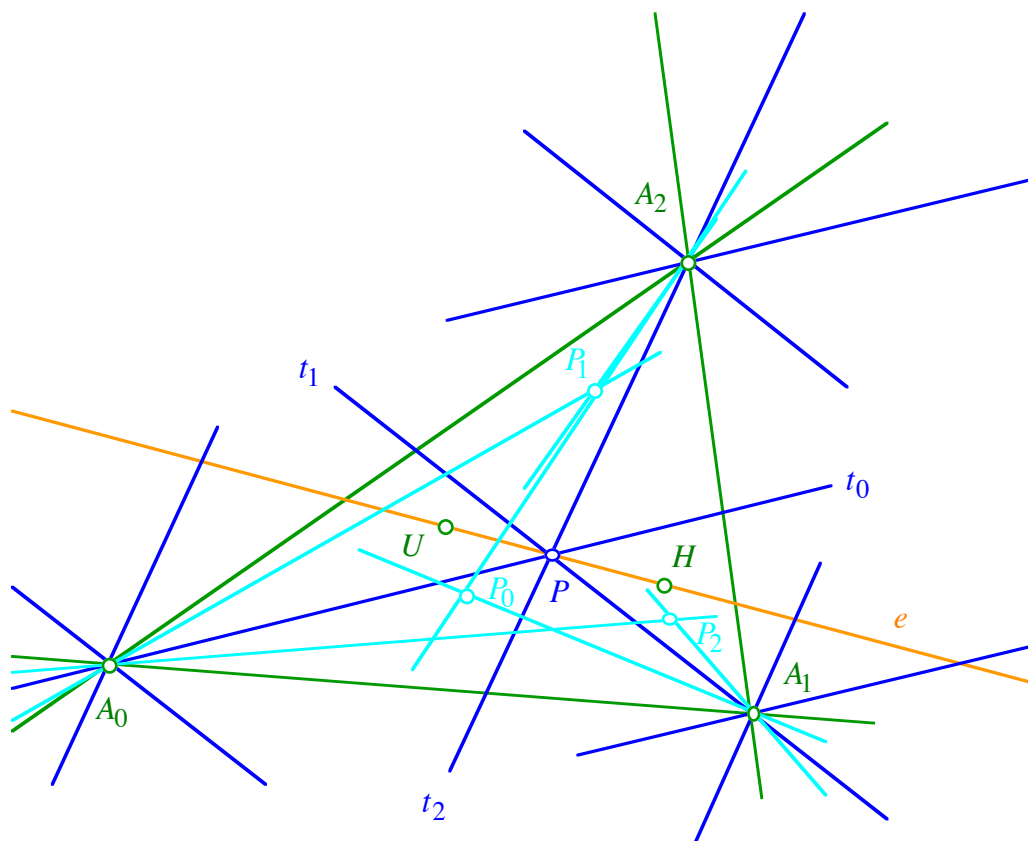
4 Die Euler-Gerade kommt ins Spiel

Die Euler-Gerade e ist die Gerade durch den Umkreismittelpunkt U und den Höhenschnittpunkt H . Auf ihr liegen auch der Schwerpunkt S und das Zentrum des Feuerbach-Kreises.

Für die folgenden Zeichnungen wählen wir einen Punkt P auf der Euler-Gerade e . Wenn wir den Punkt P außerhalb e wählen, gelten die Resultate nicht.

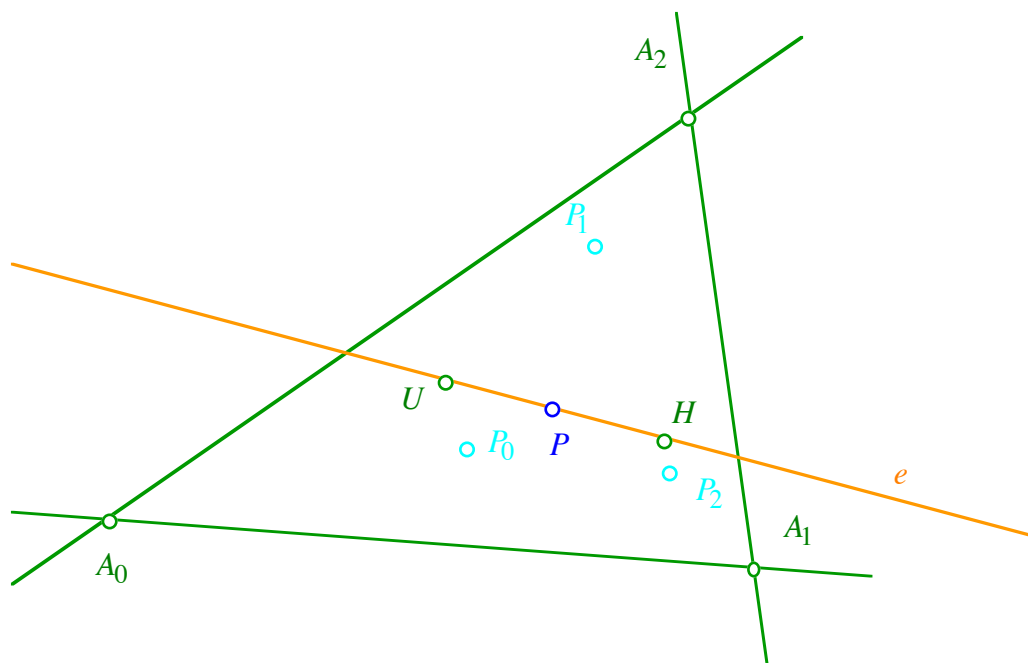
4.1 Drei Ecktransversalen

Wir zeichnen nun drei Ecktransversalen t_i durch P und die zugehörigen Punkte P_i .



Die Euler-Gerade kommt ins Spiel

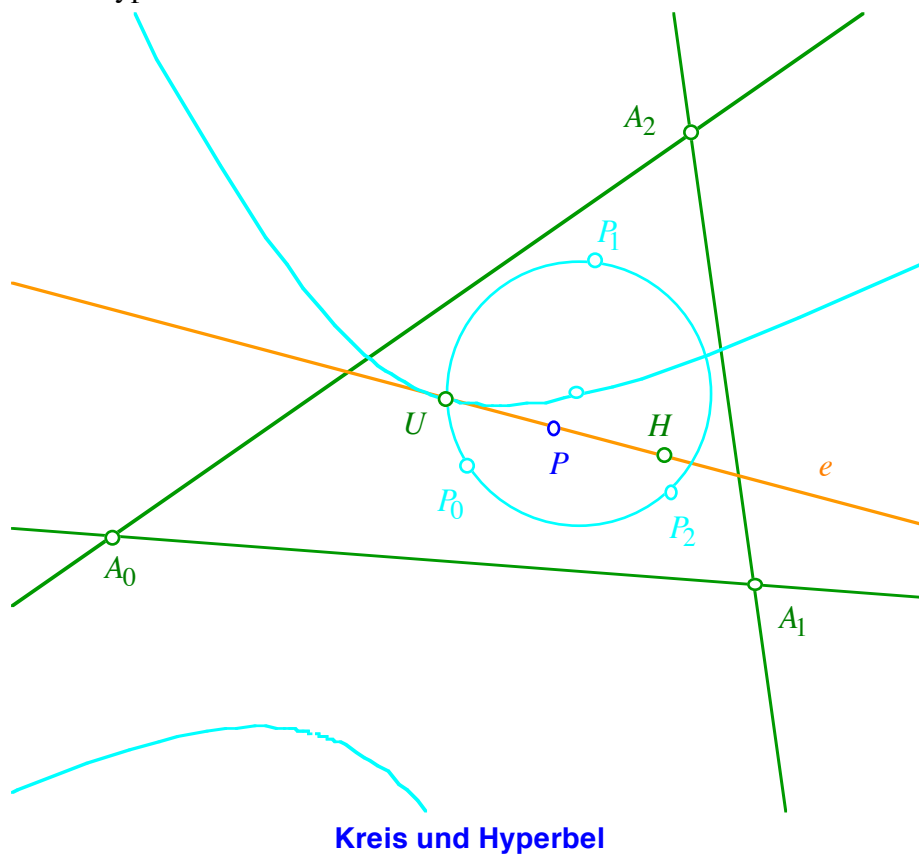
Im Folgenden lassen wir die Konstruktionslinien für die drei Punkte P_i weg.



Die drei Punkte

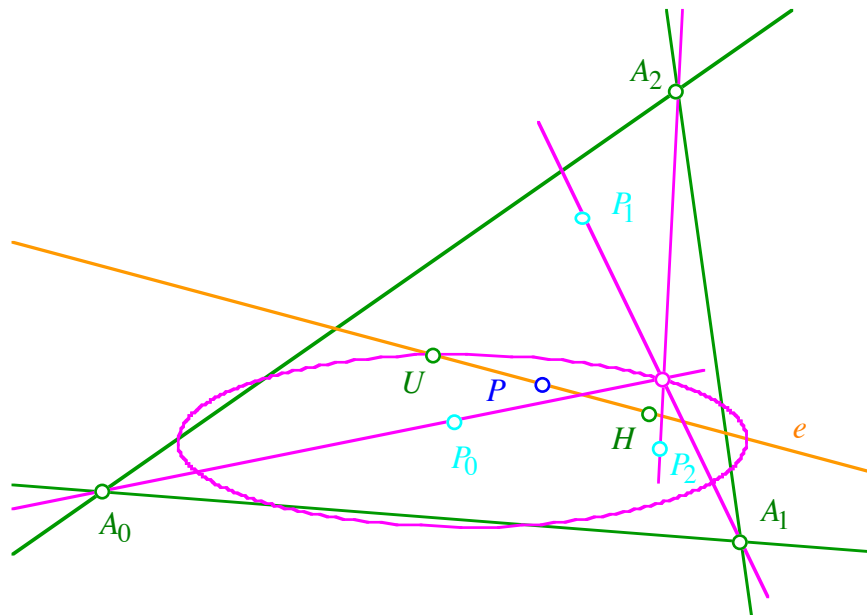
4.2 Ein Vierpunkte-Kreis

Die vier Punkte P_0, P_1, P_2, U liegen auf einem Kreis. Verifikation DGS. Wenn wir P auf der Eulergeraden e bewegen, bewegt sich der Mittelpunkt dieses Kreises auf einer Hyperbel. Die Hyperbel verläuft durch U . Verifikation DGS.



4.3 Ein Schnittpunkt

Die drei Geraden A_0P_0 , A_1P_1 und A_2P_2 verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt. Verifikation DGS. Wenn wir P auf der Eulergeraden e bewegen, variiert dieser Punkt vermutlich auf einer Ellipse durch U .



Schnittpunkt und Ellipse