Hans Walser, [20190527]

Dudeney

1 Worum geht es?

Ebenes Drehmodell zur Visualisierung der Zerlegung eines Quadrates in ein gleichseitiges Dreieck nach Dudeney. Kreisüberlagerungen

2 Die Zerlegung

Die Abbildung 1 zeigt die Zerlegung nach Dudeney.

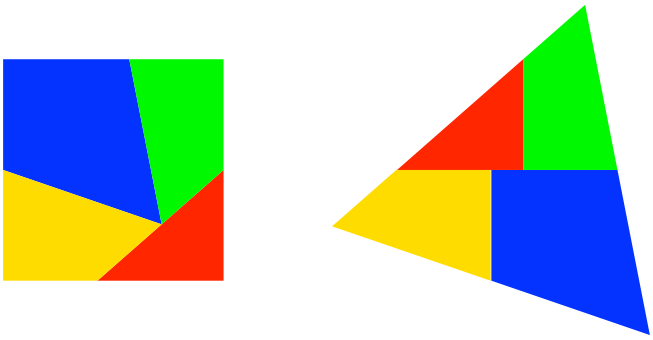

Abb. 1: Zerlegung nach Dudeney

3 Gelenke

Es gibt verschiedene Gelenkmodelle, um den Übergang von Quadrat zum Dreieck zu zeigen. Alle mir bekannten Gelenkmodelle arbeiten mit den in der Abbildung 2 eingezeichneten Gelenkpunkten.

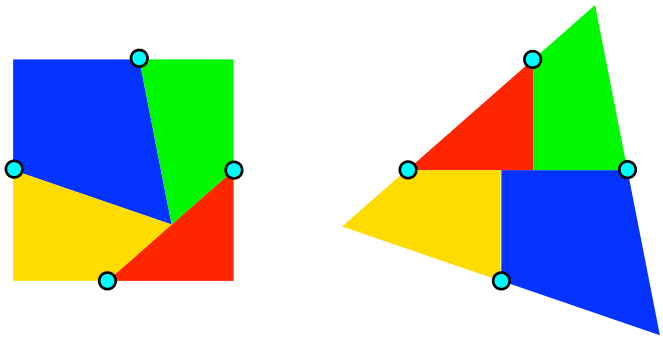

Abb. 2: Gelenkpunkte

Die vier Gelenkpunkte bilden ein Parallelogramm. Dieses ist aber kein Rechteck. Die Abweichung vom rechten Winkel beträgt allerdings nur etwa 0.5964° und kann daher von bloßem Auge zunächst nicht wahrgenommen werden.

4 Drehpunkte

Beim Quadrat legen wir in der Mitte zwischen je zwei Gelenkpunkten einen Drehpunkt fest. Vier dieser Drehpunkte sind also die Kantenmitten des Parallelogramms, der fünfte sein Mittelpunkt (Abb. 3). Man beachte, dass der Mittelpunkt der Hypotenuse des roten Dreiecks sich *nicht* in der gemeinsamen Ecke des grünen, blauen und goldenen Teils befindet. Dies ist eine Folge der Abweichung des Parallelogramms vom Rechteck.

Nun drehen wir jedes Puzzleteil um eine der Kantenmitten um 180°.

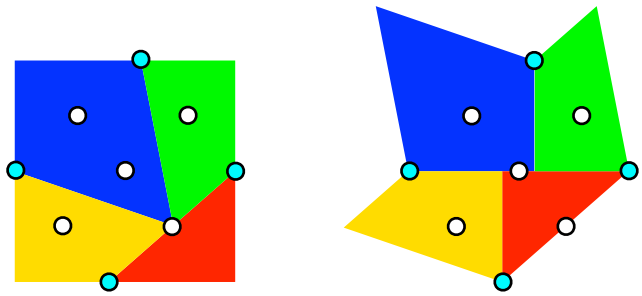

Abb. 3: Drehungen

Die entstehende Figur ist noch nicht das gleichseitige Dreieck. Wenn wir aber das rote und das blaue Teil noch zusätzlich um den Mittelpunkt des Parallelogramms um 180° drehen, kommen wir hin (Abb. 4).

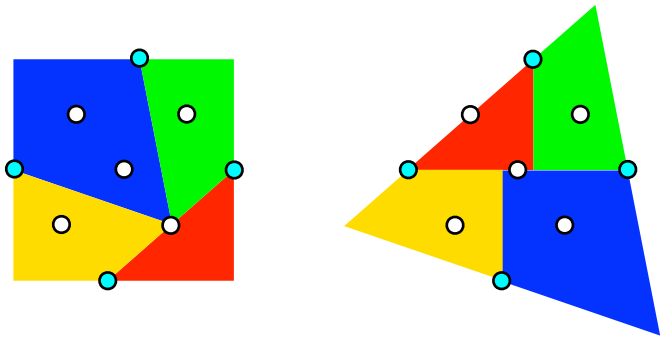

Abb. 4: Drehung um Mittelpunkt

Die Animation1 beschreibt den Vorgang.

5 Analyse der Drehungen. Bahnkurven

Das grüne und das goldene Teil werden einfach gedreht. Die Bahnkurven sind Kreise.

Beim roten und beim blauen Teil haben wir eine Überlagerung von zwei Drehungen. Das erleben wir etwa, wenn auf einem drehenden Karussell sich ein zusätzlich drehendes Binnenkarussell befindet. Das rote und das blaue Teil beschreiben eine Art Salto.

Jedes Teil hat eine Ecke mit einem rechten Winkel, die Ecken des Quadrates. Die Abbildung 5 gibt die Bahnkurven dieser Eckpunkte. Wir sehen, dass beim grünen und beim goldenen Teil noch je zwei weitere Eckpunkte auf der zugehörigen Bahnkurve liegen. Diese Bahnkurven sind Kreise. Die Bahnkurven des roten und des blauen Teils haben einen doppelten Umlauf und einen Doppelpunkt. Es handelt sich hier um (verallgemeinerte) Strophoiden.

In der Animation2 sehen wir das Gleiten der Eckpunkte auf diesen Bahnkurven.

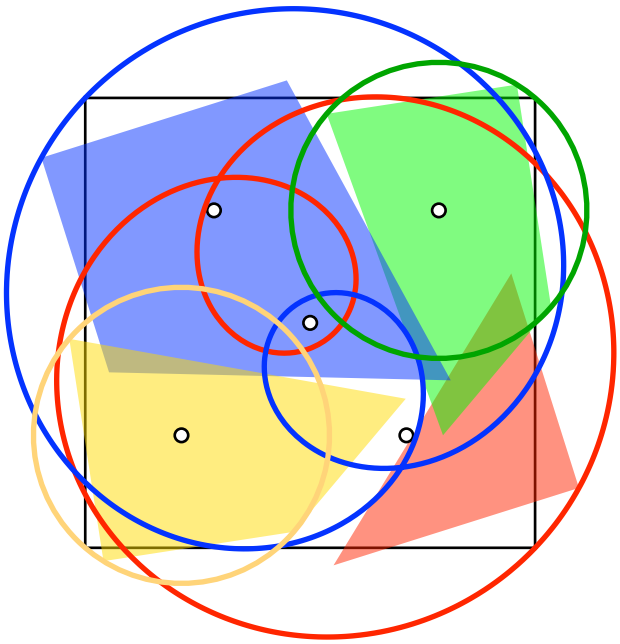

Abb. 5: Bahnkurven der Ecken mit rechten Winkeln

Das grüne, blaue und goldene Teil haben auch je eine Ecke mit einem 60°-Winkel, die Ecken des gleichseitigen Dreiecks. Die Abbildung 6 zeigt die Bahnkurven dieser drei Punkte.

In der Animation3 sehen wir das Gleiten der Eckpunkte auf diesen Bahnkurven.

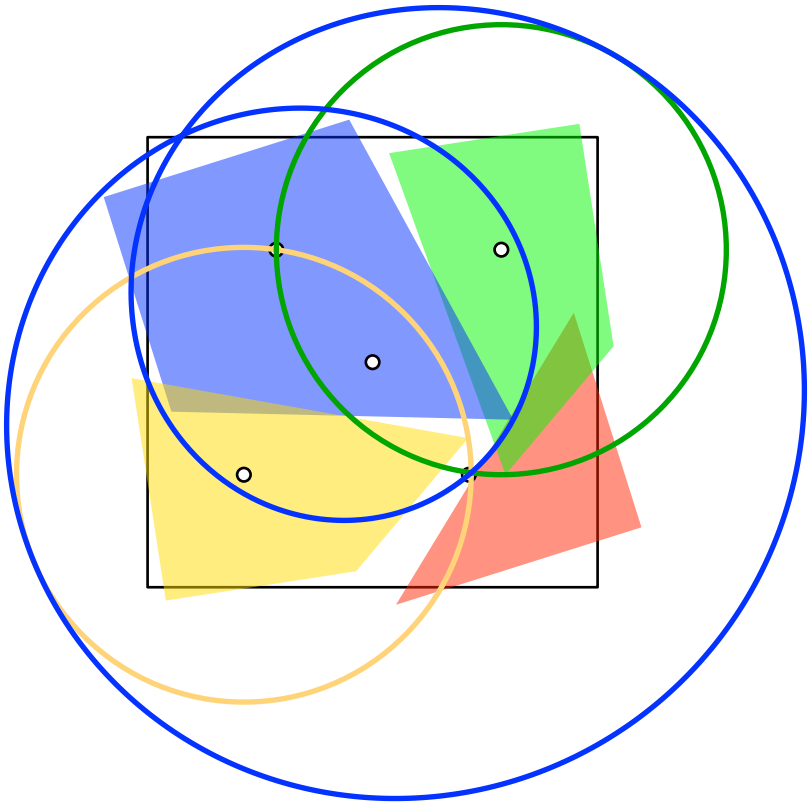

Abb. 6: Bahnkurven der Ecken mit 60°-Winkeln

Weblinks

DITOH, Spezieller platonischer Körper
https://www.ditoh.com

Hans Walser: Sechseckpuzzle
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Sechseckpuzzle/index.html

Hans Walser: Kreuzpuzzle
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreuzpuzzle2/index.html

Hans Walser: Frederickson
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Frederickson/index.html

Hans Walser: Dudeney
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Dudeney2/Dudeney2.htm

Hans Walser: Dudeney
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Dudeney3/index.html