Hans Walser, [20190416], [20200115]

Dudeney

Idee: Patrik G. K. Wiesner, BSc ETHZ, Davidgasse 42, A - 1100 Wien

1 Worum geht es?

Studien und Daten zum „Haberdasher Problem“ (Dudeney, 1903).

2 Zerlegungsgleichheit

Die Abbildung 1 zeigt eine gemeinsame Zerlegung eines gleichseitigen Dreiecks und eines flächengleichen Quadrates mit vier Teilen (nach Dudeney, 1903).

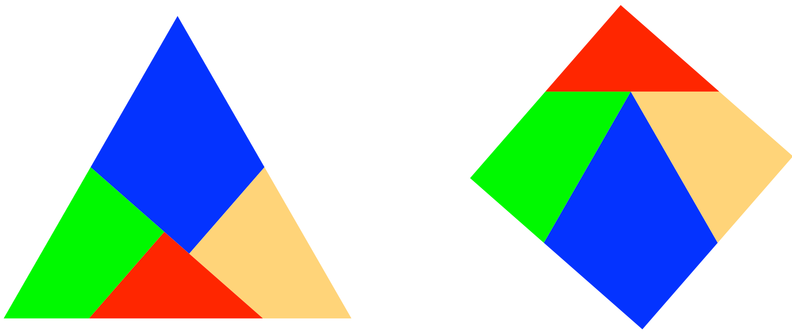

Abb. 1: Gemeinsame Zerlegung mit vier Teilen

3 Bezeichnungen und Daten

Wir setzen den gemeinsamen Flächeninhalt 1. Das Quadrat (Abb. 2) hat also die Seitenlänge 1.

Für die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreieckes ergibt sich aus dem Flächeninhalt 1:

$$s = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \approx 1.519671371 \tag{1}$$

Für die halbe Seitenlänge, die in der Abbildung 2 mehrfach erscheint, daher:

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 0.7598356856 \tag{2}$$

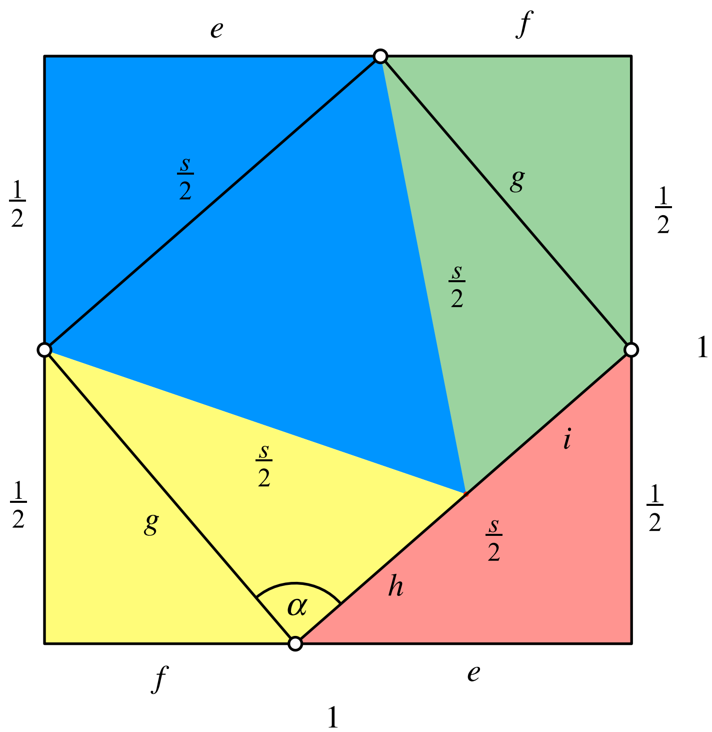

Abb. 2: Bezeichnungen

Weiter ist:

$$e=\sqrt{\left(\tfrac{s}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}=\tfrac{1}{6}\sqrt{-9+12\sqrt{3}}\approx 0.572145322 \tag{3}$$

$$f=1-e\approx 0.4278546779 \tag{4}$$

$$g=\sqrt{f^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}\approx 0.6580726593 \tag{5}$$

Das schwarz eingezeichnete Viereck ist ein Parallelogramm. Sein spitzer Winkel ist:

$$\alpha=180°-\arctan\left(\tfrac{1}{2e}\right)-\arctan\left(\tfrac{1}{2f}\right)\approx 89.40357850° \tag{6}$$

Das Parallelogramm ist also *kein* Rechteck.
Weiter ist:

$$h = \tfrac{s}{4} + g\cos(\alpha) \approx 0.3867679378 \tag{7}$$

und

$$i = \tfrac{s}{4} - g\cos(\alpha) \approx 0.3730677473 \tag{8}$$

Damit sind die vier Teile der Zerlegung konstruierbar.

4 Gelenkmodelle

4.1 Klassisches Gelenkmodell

Die Abbildung 3 zeigt das klassische Verfahren. An drei der vier Ecken des Parallelogramms der Abbildung 2 denken wir uns ein Gelenkscharnier. Die vierte Ecke bleibt offen. Nun werden die vier Seiten des Parallelogramms zunächst auf eine Gerade gezogen und anschließend anders herum wieder zum Parallelogramm geschlossen.

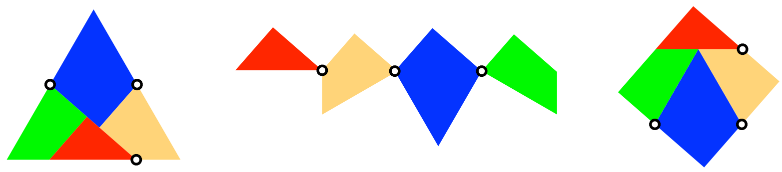

Abb. 3: Klassisches Verfahren

4.2 Vier Gelenke

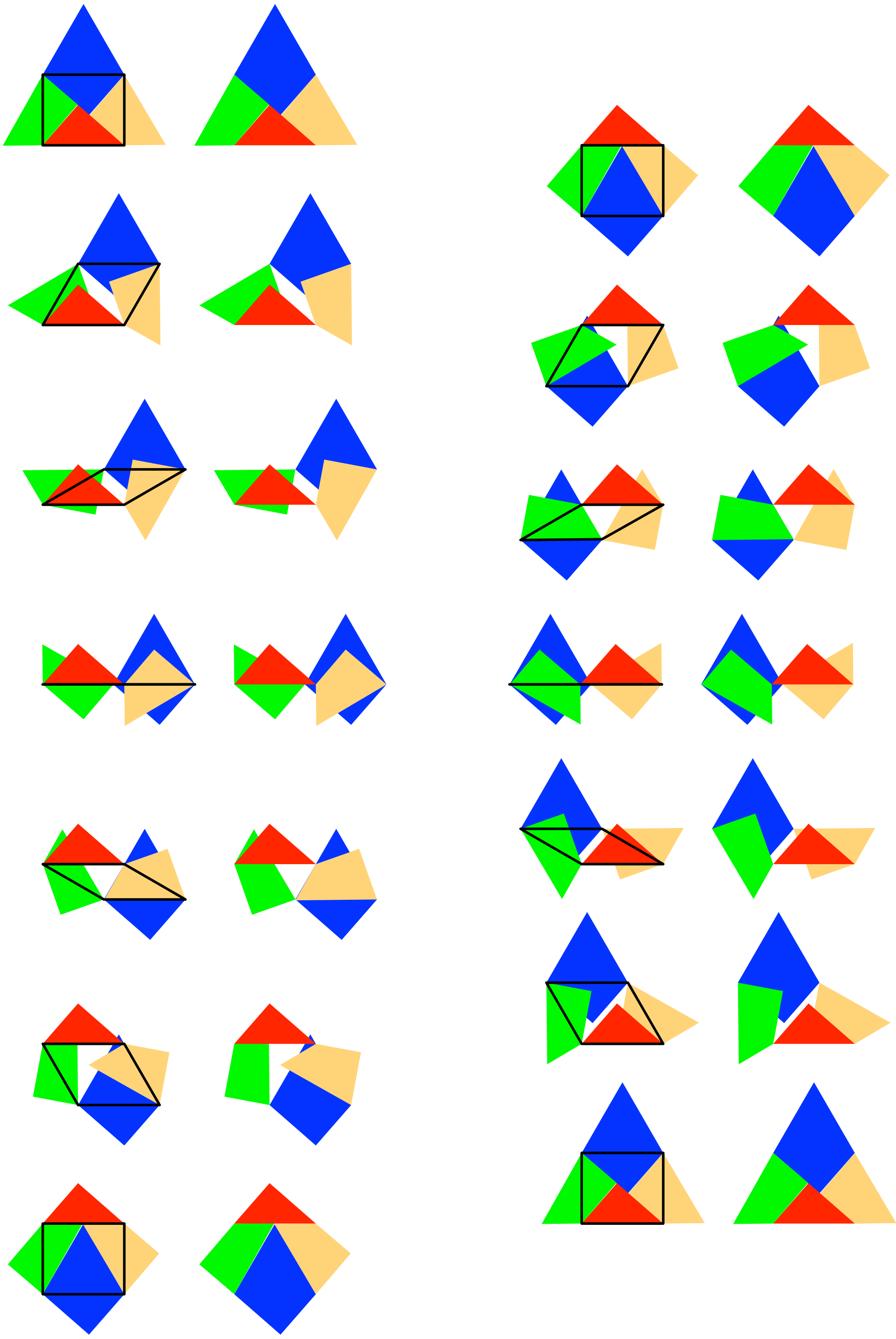

Abb. 4: Parallelogramm-Gelenkmodell

Wir denken uns in allen vier Ecken des Parallelogramms ein Gelenk. Die Abbildung 4 zeigt verschiedene Positionen des Parallelogramms.

Wir denken uns die Basis des Parallelogramms ortsfest. Dies ist auch die Basis des roten Dreieckes. Nun verdrehen wir eine anschließende Seite des Parallelogramms. In der Abbildung 4 ist das eine Diagonale des grünen Vierecks. Die zur festen Grundlinie des Parallelogramms parallele Seite ist eine Diagonale des blauen Viereckes. Die vierte Seite des Parallelogramms schließlich ist eine Diagonale des goldgelben Viereckes.

So kommen wir (linke Spalte der Abb. 4) vom gleichseitigen Dreieck zum Quadrat. Durch Weiterdrehen (rechte Spalte der Abb. 4) kommen wir schließlich wieder zum gleichseitigen Dreieck.

4.3 Anzahl der Ebenen

Wir sehen, dass sich die Puzzle-Teile überlappen.

Für die linke Spalte der Abbildung 4 benötigen wir nur zwei Ebenen: eine vordere Ebene für rot-goldgelb und eine hintere Ebene für grün-blau. Wenn wir also den Prozess der linken Spalte umkehren, kommen wir vom Quadrat zum gleichseitigen Dreieck zurück. Somit können wir ein Modell Dreieck <–> Quadrat bauen, das mit zwei Ebenen und einer Richtungsumkehr arbeitet. Dies ist die Idee von Patrik G. K. Wiesner, BSc ETHZ, Davidgasse 42, A - 1100 Wien. Das Verfahren ist patentiert.

Bei der Modellierung beider Spalten der Abbildung 4 benötigen wir drei Ebnen: eine vorderste Ebene für rot, eine mittlere Ebene für grün und goldgelb und eine hinterste Ebene für blau. Ein zyklisches Modell Dreieck –> Quadrat –> Dreieck benötigt also drei Ebenen.

Weblinks

DITOH, Spezieller platonischer Körper

https://www.ditoh.com

Animationen

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen > Dudeney