Hans Walser, [20190313]

Dreieck und Quadrate

1 Worum geht es?

Flächensatz am gleichseitigen Dreieck.

2 Konstruktion

In einem gleichseitigen Dreieck zeichnen wir eine zu einer Seite parallele Gerade durch den Schwerpunkt. Auf dieser Geraden wählen wir einen beliebigen Punkt (Abb. 1).

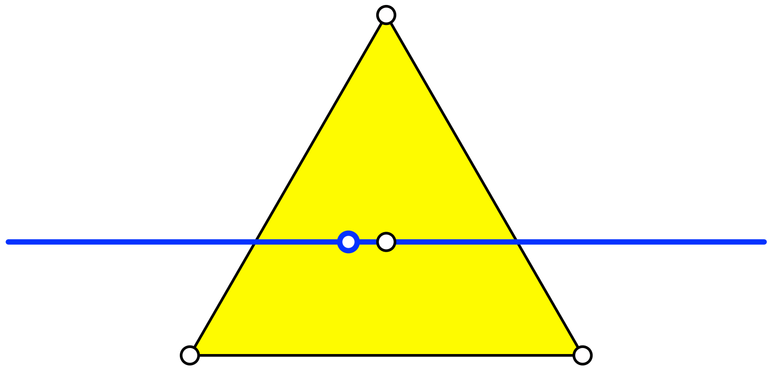

Abb. 1: Disposition

Wir verbinden diesen Punkt mit den Ecken und ergänzen jede Verbindungsstrecke zu einem Quadrat (Abb. 2).

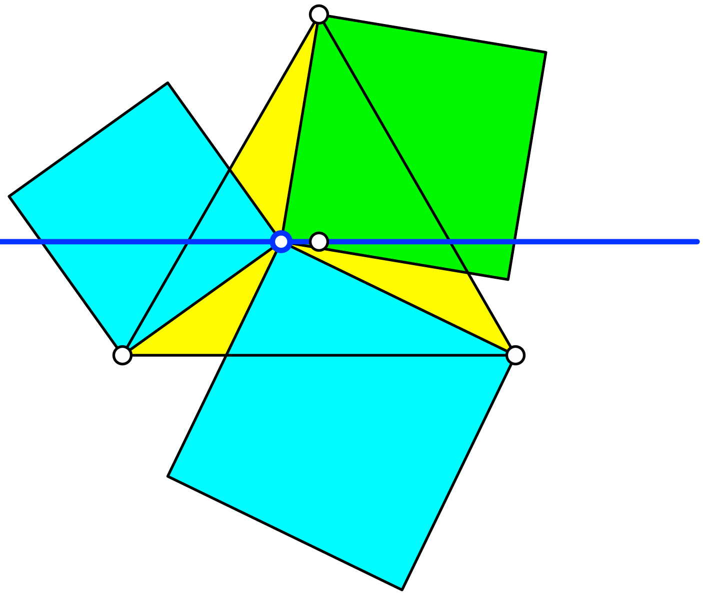

Abb. 2: Quadrate

Wir verdoppeln das grüne Quadrat mit Hilfe einer Diagonalen zu einem roten Quadrat (Abb. 3).

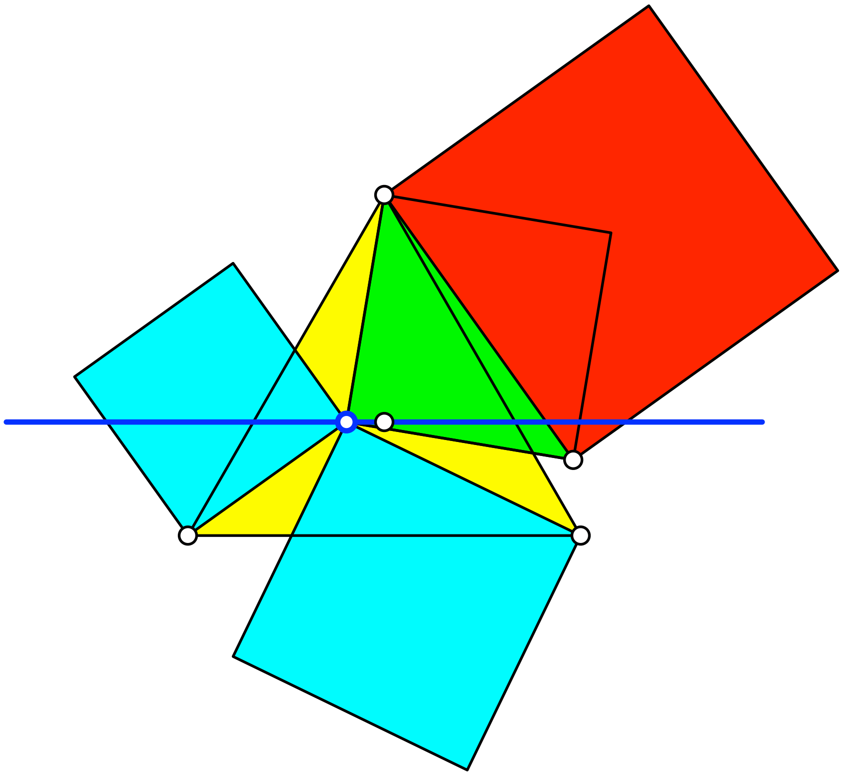

Abb. 3: Verdoppelung zum roten Quadrat

3 Der Flächensatz

In der Situation der Abbildung 3 ist das rote Quadratfläche gleich der Summe der beiden blauen Quadratflächen. Erinnert an den Satz des Pythagoras.

4 Beweis

Wir verwenden die Bezeichnungen und Maße der Abbildung 4. Das gleichseitige Dreieck hat die Seitenlänge 2. Das Dreieck hat damit die Höhe $\sqrt{3}$.

Mit t bezeichnen wir die Auslenkung des gewählten Punktes vom Schwerpunkt aus. Weiter sind a, b und d die Verbindungsstrecken zu den Dreiecksecken.

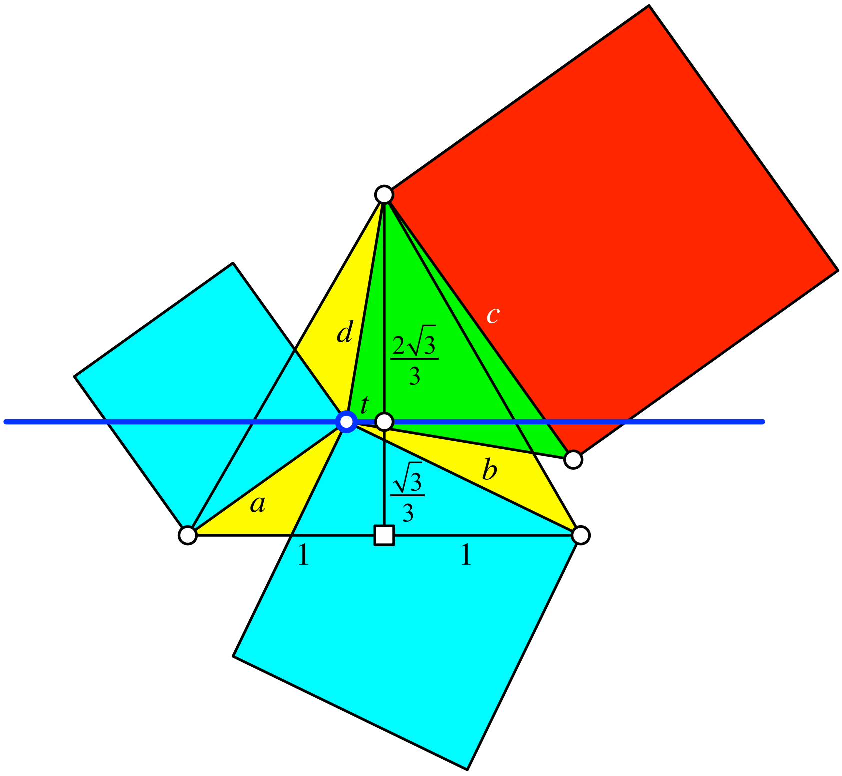

Abb. 4: Maße und Bezeichnungen

Mit Pythagoras finden wir:

$$\begin{aligned} a^2 &= (1-t)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - 2t + t^2 + \tfrac{1}{3} \\ b^2 &= (1+t)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 + 2t + t^2 + \tfrac{1}{3} \end{aligned} \qquad (1)$$

Somit ist:

$$a^2 + b^2 = 2\left(t^2 + \tfrac{4}{3}\right) \qquad (2)$$

Dies ist die Flächensumme der beiden blauen Quadrate.
Weiter ist:

$$d^2 = t^2 + \left(\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = t^2 + \tfrac{4}{3} \qquad (3)$$

Dies ist der Flächeninhalt des grünen Quadrates. Das rote Quadrat ist flächenmäßig doppelt so groß. Aus (2) folgt daher die Behauptung.

Bemerkung: Der Sachverhalt ergibt sich als Nebenresultat von [1].

Websites

[1] Hans Walser: Kreisscharen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreisscharen2/Kreisscharen2.htm