Hans Walser, [20200414]

Dächer

1 Worum geht es?

Körper aus zwei kongruenten regelmäßigen Vielecken. Interessante Dachformen.

2 Origami

Wir beginnen mit zwei Origami-Quadraten gleicher Größe und falten diese gemäß Abbildung 1. Bergfaltlinien blau, Talfaltlinien rot.

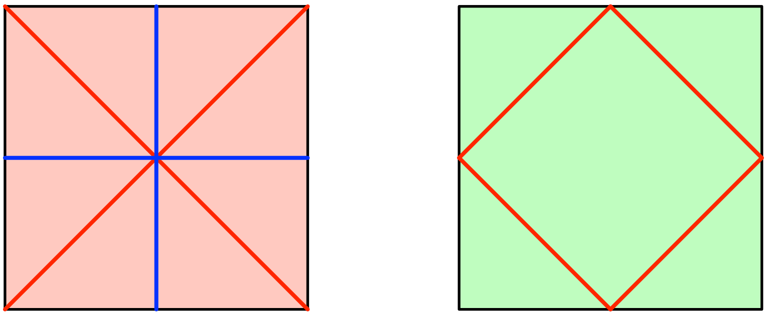

Abb. 1: Origami

Die Abbildung 2 zeigt das Realmodell. Die Form des Daches hat mich als Kind schon immer fasziniert.

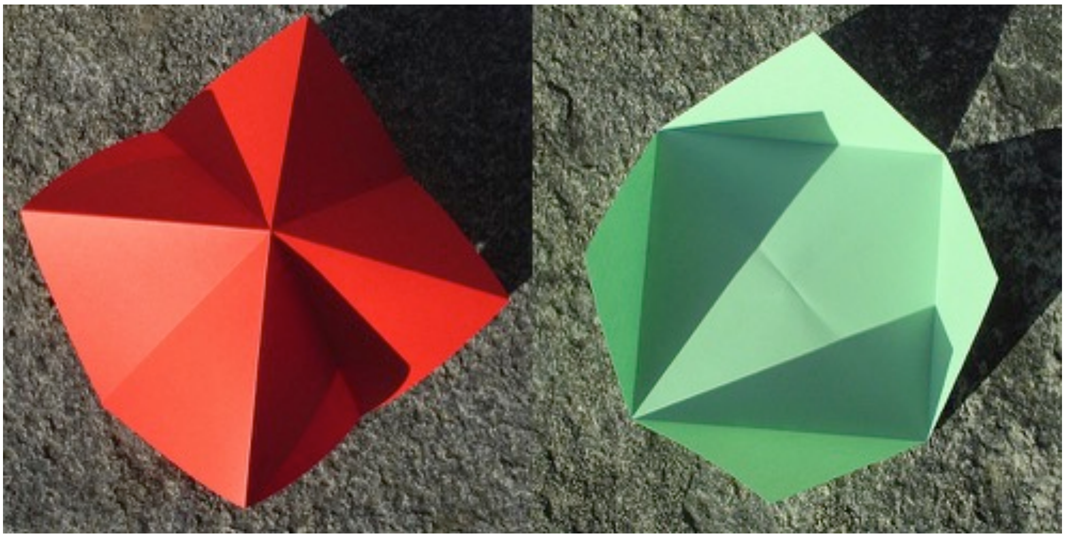

Abb. 2: Origami-Papier

Die Abbildung 3 zeigt dasselbe virtuell.

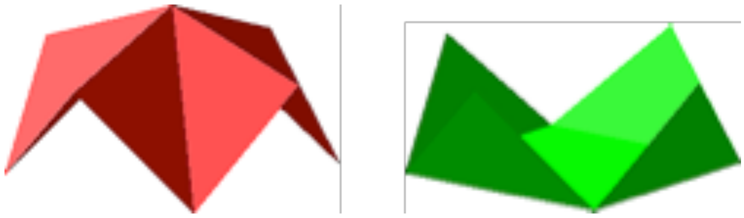

Abb. 3: Dach und Bodenstück

Nun schieben wir das Dach so auf das Bodenstück, dass die Ecken des Dach-Origamiteils auf die Seitenmitten des Bodenstück-Origamiteils zu liegen kommen und umgekehrt (Abb. 4).

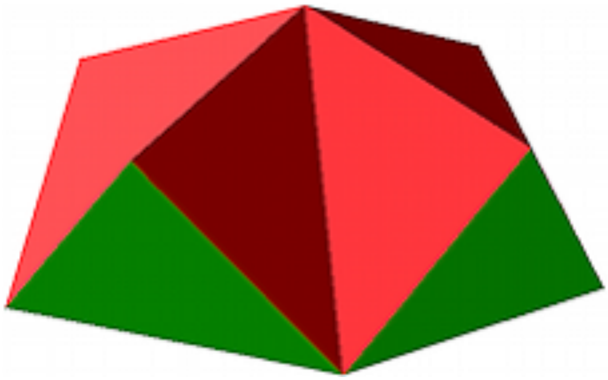

Abb. 4: Das Haus

Die Abbildung 5 zeigt das Realmodell aus Papier.

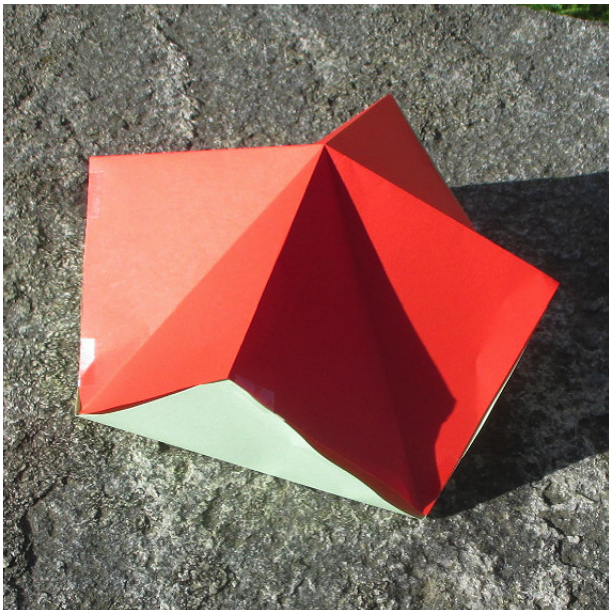

Abb. 5: Papiermodell

Bei einer Kantenlänge *s* des Origamipapiers hat das Haus ein Volumen *V*:

$$V = \frac{1}{6}s^3 \tag{1}$$

Die Abbildung 6 zeigt die Situation von oben. Der Umriss ist allerdings *kein* regelmäßiges Achteck.

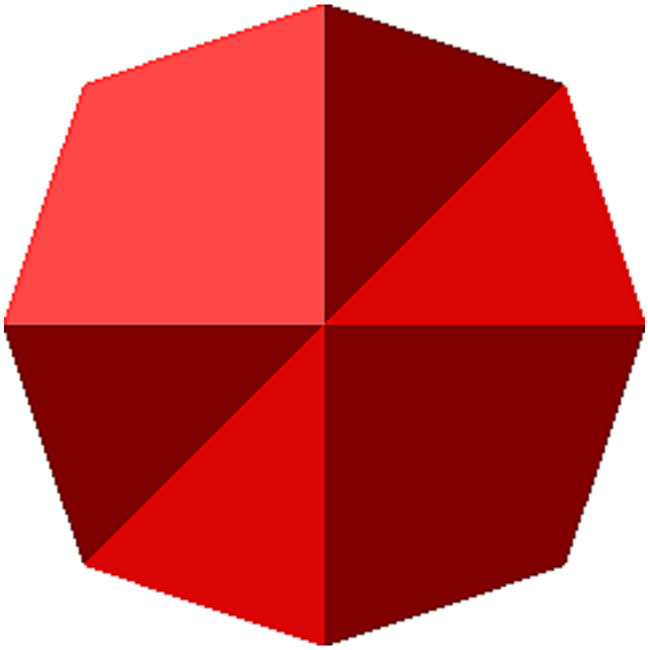

Abb. 6: Sicht von oben

3 Verallgemeinerung

Wir können das quadratische Origami-Papier ersetzen durch regelmäßige n-Ecke. Im Folgenden einige Beispiele.

Die Abbildung 7 zeigt die Faltlinien für $n = 3$. Wir sehen in der Dachfläche einen Wechsel zwischen Bergfaltlinie und Talfaltlinie. Das ist für alle ungeraden n so.

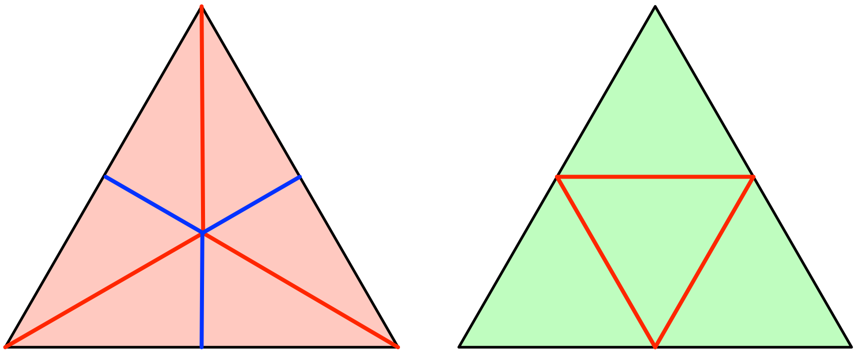

Abb. 7: Faltlinien für Dreiecke

Die Abbildung 8 zeigt das zugehörige Haus.

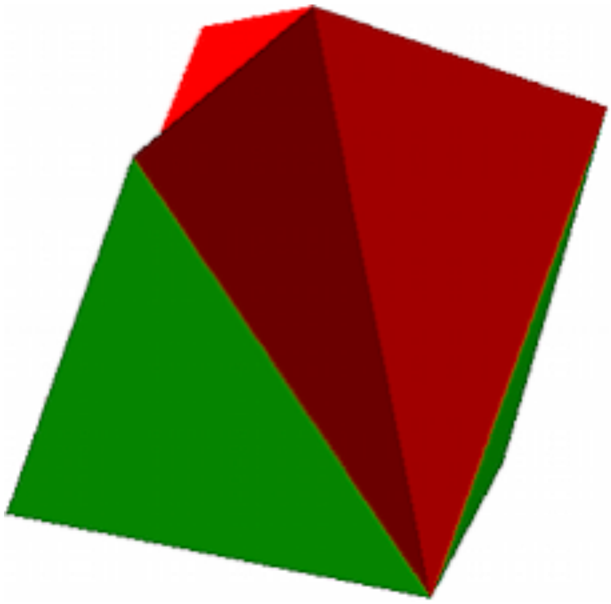

Abb. 8: *n* = 3

Die Abbildung 9 zeigt das Haus für $n = 5$.

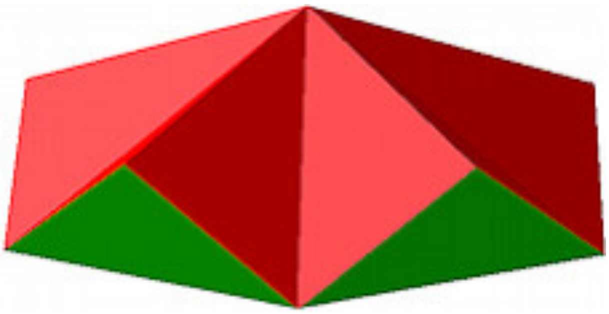

Abb. 9: *n* = 5

Die Abbildung 10 zeigt das Haus für $n = 6$.

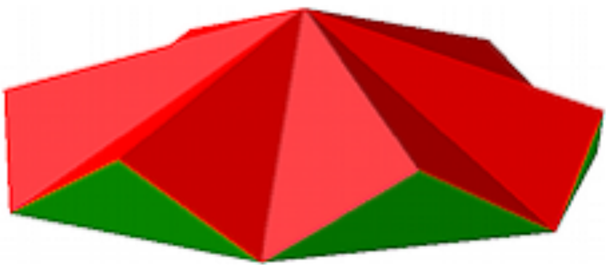

Abb. 10: *n* = 6

4 Koordinaten

Bezeichnungen gemäß Abbildung 11.

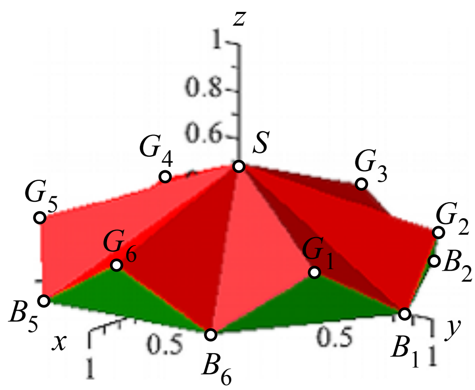

Abb. 11: Bezeichnungen

Es ist zunächst:

$$\begin{aligned} S &= \left(0, 0, \sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\right) \\ B_k &= \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\cos\left(k\tfrac{2\pi}{n}+\tfrac{\pi}{n}\right), \cos\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\sin\left(k\tfrac{2\pi}{n}+\tfrac{\pi}{n}\right), 0\right), \quad k \in \{1,2,\ldots,n\} \end{aligned} \tag{2}$$

Weiter arbeiten wir mit den Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned} & h = \sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right), \quad h^* = h^2 \\ & \alpha = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) \\ & \delta = \pi - \alpha - \beta \\ & \xi = \cos^2\left(\tfrac{\pi}{n}\right) + h^* \cos(\delta), \quad \eta = h^* \sin(\delta) \end{aligned} \tag{3}$$

Damit wird:

$$G_k = \left(\xi \cos\left(k\tfrac{2\square}{n}\right), \xi \sin\left(k\tfrac{2\square}{n}\right), \eta\right), \quad k \in \{1,2,\ldots,n\} \tag{4}$$