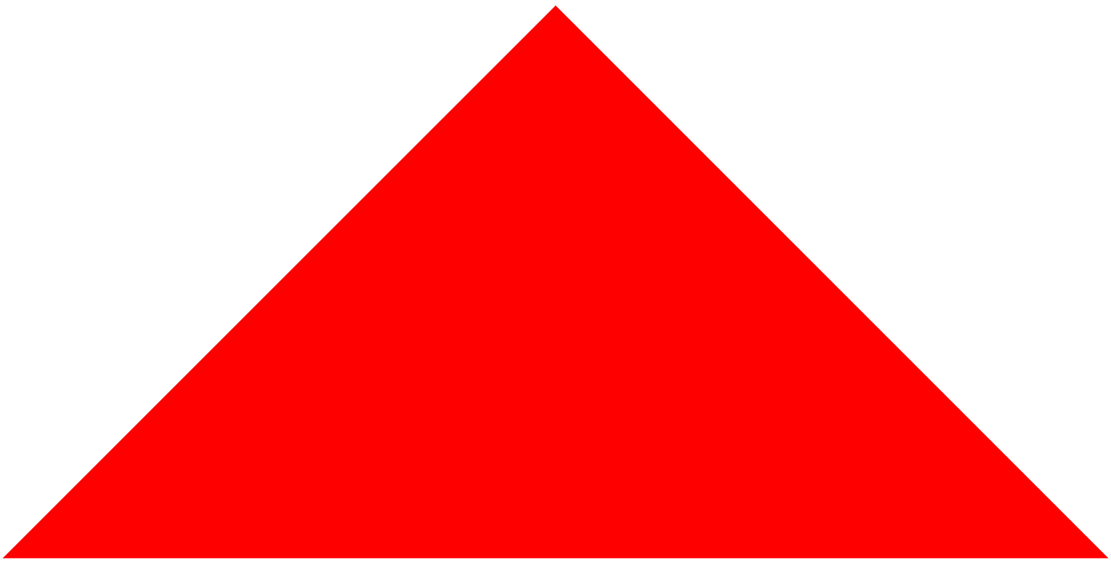
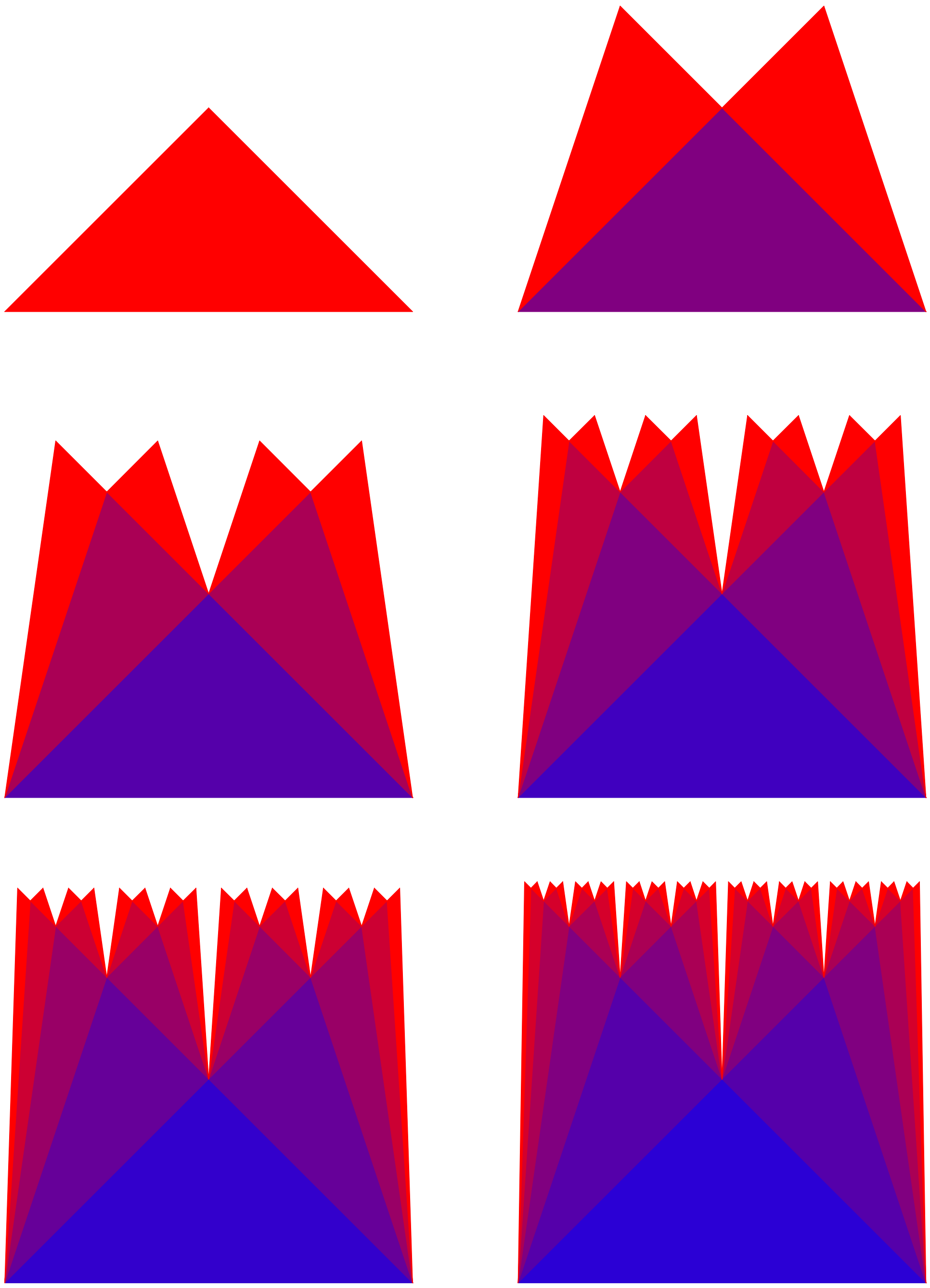
Hans Walser, [20080105a]

Berge

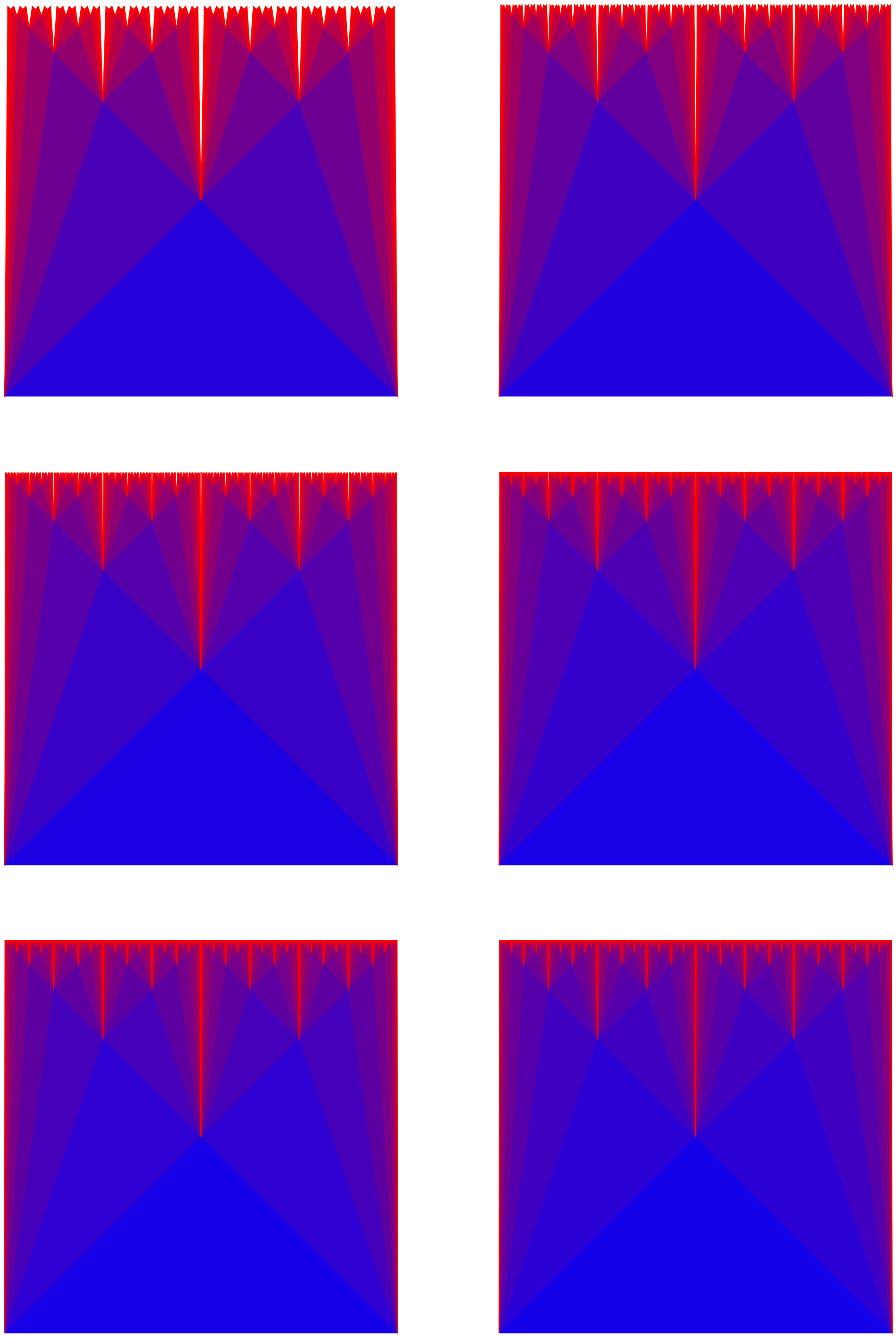
Eine Figurenfolge im Einheitsquadrat. Wir beginnen mit einem Dreieck.



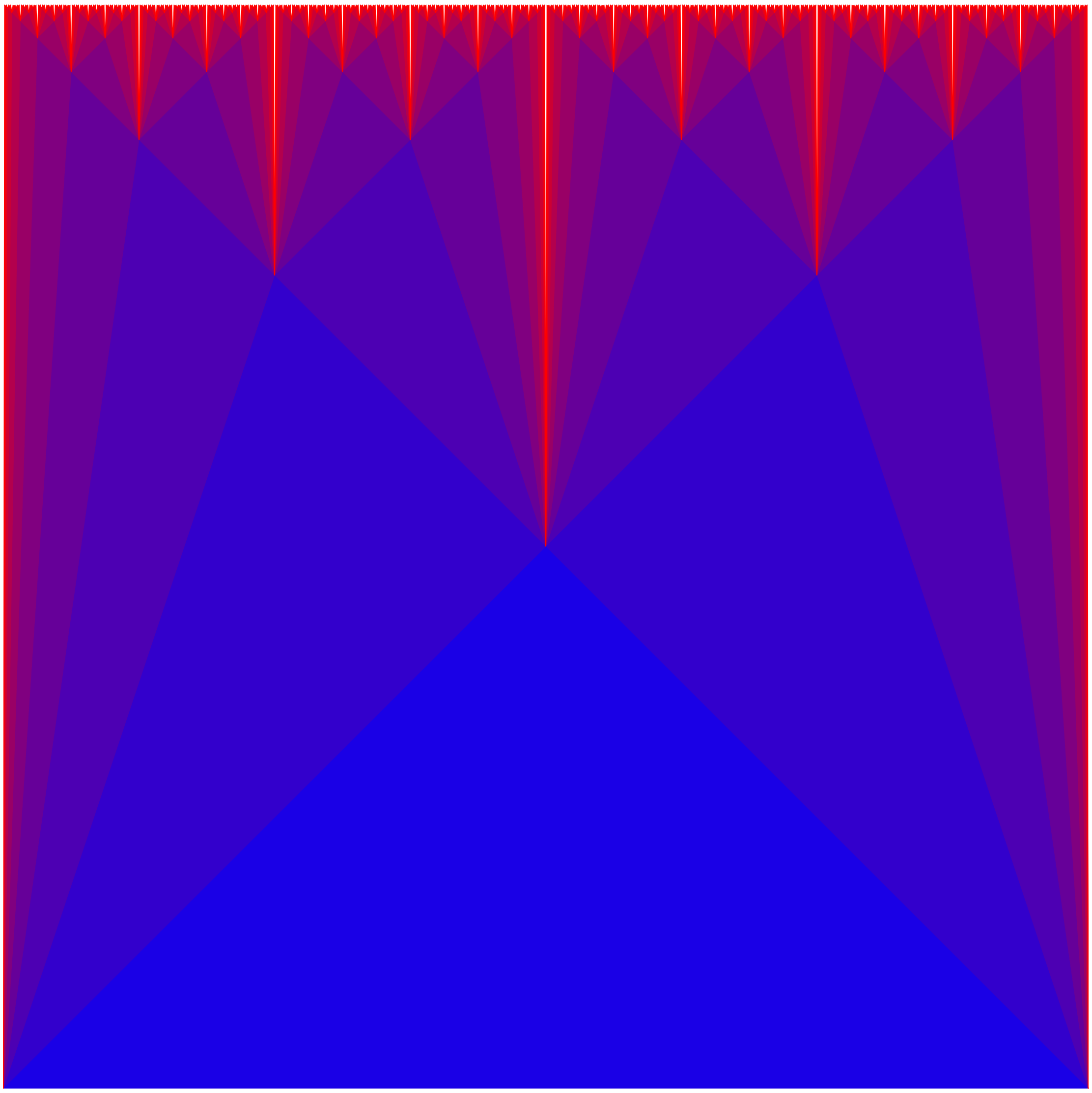
Start



Weitere Spitzen

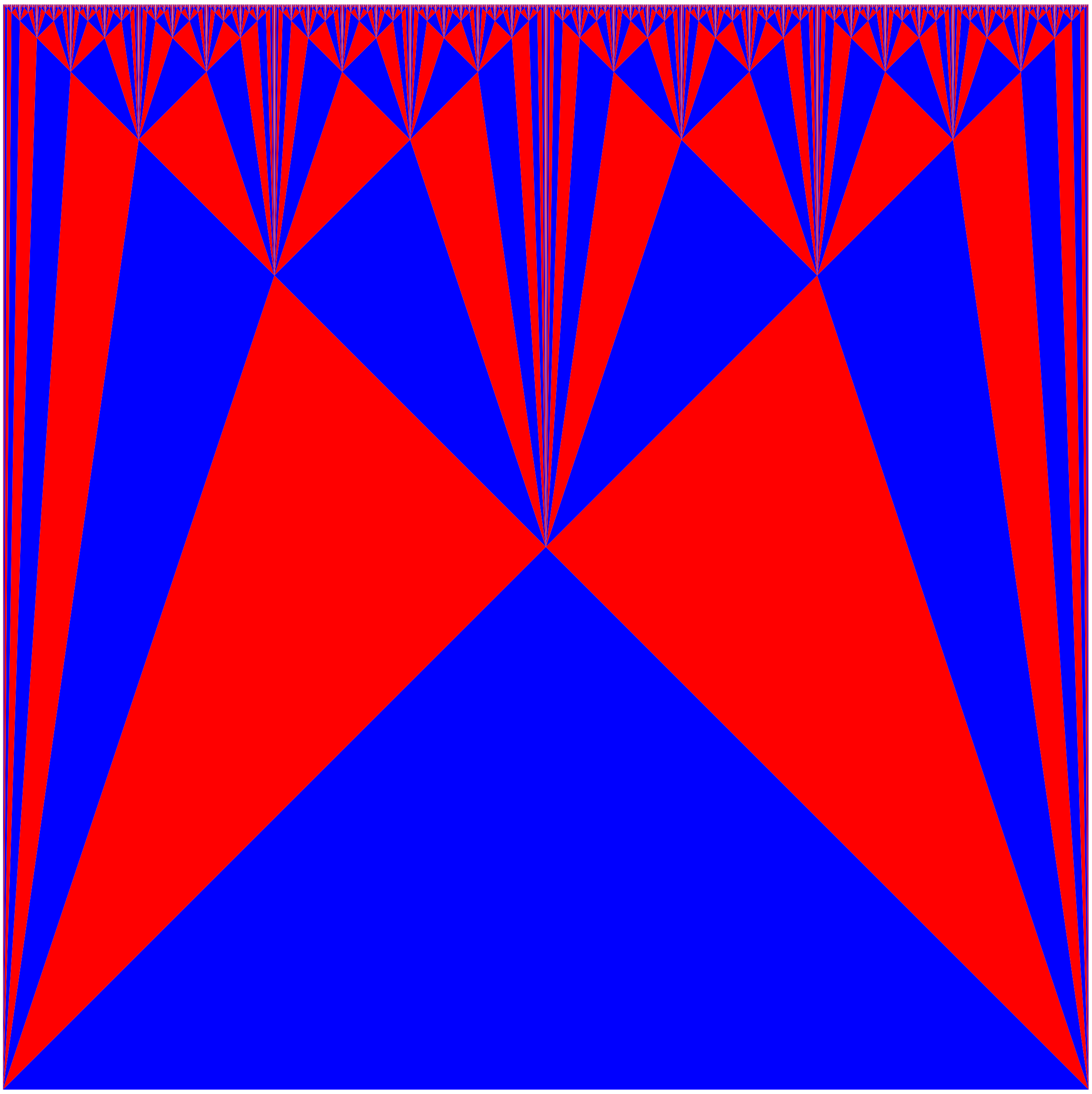


Immer mehr Spitzen



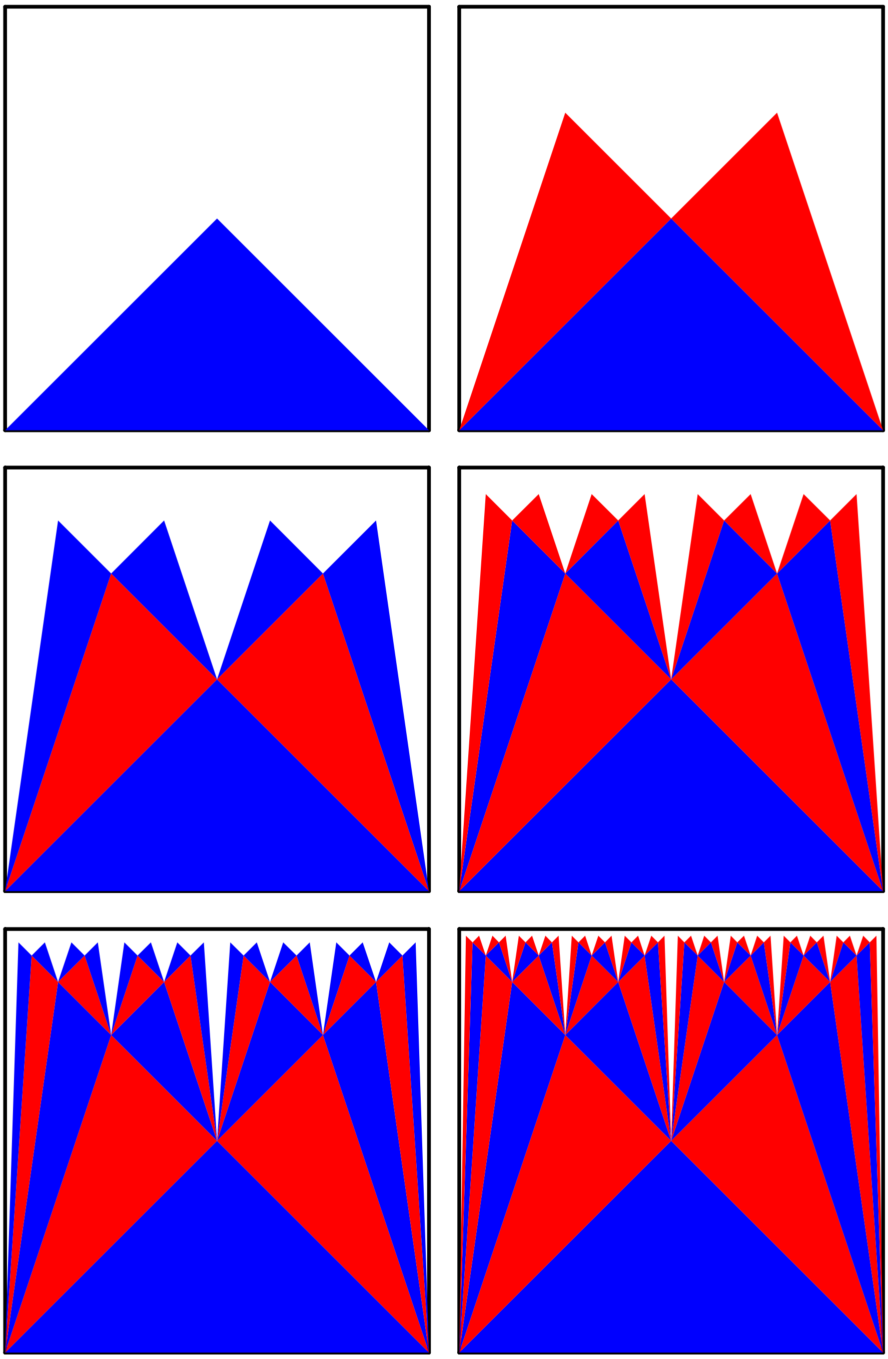
Alpenglühn

Dasselbe in Blaurot. Wie groß ist der rote Flächenanteil?



Blaurot

Wir listen schrittweise die blauen und roten Flächenanteile auf.



Schrittweises Vorgehen

Wir lesen — mit einigem Bruchrechnen — aus den Figuren ab:

Schritt	Farbe	Anteil
1	blau	$\frac{1}{4}$
2	rot	$\frac{2}{8}$
3	blau	$\frac{3}{16}$
4	rot	$\frac{4}{32}$
5	blau	$\frac{5}{64}$
6	rot	$\frac{6}{128}$
i		$\frac{i}{2^{i+1}}$

Die Gesetzmäßigkeit ist offensichtlich.
Für den roten Anteil erhalten wir:

$$\text{Roter Anteil} = \frac{2}{8} + \frac{4}{32} + \frac{6}{128} + \cdots = \frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{3}{64} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{1}{4}\right)^i$$

Aus der Formel (Herleitung unten) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} iq^i = \frac{q}{(1-q)^2}$ erhalten wir einen roten Anteil von $\frac{4}{9}$. Der blaue Anteil ist entsprechend $\frac{5}{9}$.

Herleitung der Formel:
Für eine geometrische Reihe gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{q}{1-q}$$

Durch Ableiten auf beiden Seiten erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} = \frac{1-q-(-q)}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Multiplikation mit q liefert die gewünschte Formel.