

Hans Walser, [20150307]

Ableitung der Sinusfunktion

1 Heuristisches Vorgehen

Zum Funktionsgraphen der Sinusfunktion werden die Steigungen graphisch ermittelt und als Funktion skizziert. Das legt die Vermutung $\frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t)$ nahe.

2 Einsicht und Beweis

Mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sin(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t)\cos(h) + \cos(t)\sin(h) - \sin(t)}{h} \\ &= \cos(t) \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{L_1} + \sin(t) \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}}_{L_2} \end{aligned}$$

In beiden Limites haben wir eine „Null zu null“-Situation. Das mahnt zur Vorsicht.

2.1 Experimentell numerisches Vorgehen

Wir erhalten:

h	$\frac{\sin(h)}{h}$	$\frac{\cos(h)-1}{h}$
1.00000	0.84147	-0.45970
0.10000	0.99833	-0.04996
0.01000	0.99998	-0.00500
0.00100	1.00000	-0.00050
0.00010	1.00000	-0.00005
0.00001	1.00000	-0.00000

Tab. 1: Experiment

Auf Grund des Experimentes vermuten wir $L_1 = 1$ und $L_2 = 0$. Damit haben wir erneut die Vermutung:

$$\frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t)$$

2.2 Beweis

2.2.1 Beweis für den ersten Grenzwert. Sandwichbeweis

Wir arbeiten mit den drei in der Abbildung 1 eingezeichneten Figuren.

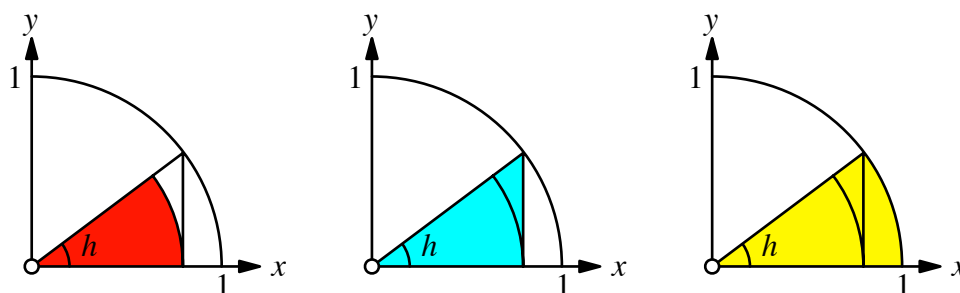


Abb. 1: Beweisfiguren

Die drei Figuren haben der Reihe nach die Flächeninhalte $\frac{1}{2}h \cos^2(h)$, $\frac{1}{2}\cos(h)\sin(h)$ und $\frac{1}{2}h$. Es ist auf Grund der Abbildung 1:

$$\frac{1}{2}h \cos^2(h) < \frac{1}{2}\cos(h)\sin(h) < \frac{1}{2}h$$

Daraus ergibt sich:

$$\cos(h) < \frac{\sin(h)}{h} < \frac{1}{\cos(h)}$$

Für den Limes $h \rightarrow 0$ erhalten wir daher:

$$\underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h)}_1 \leq \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{L_1} \leq \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(h)}}_1$$

Dabei ist zu beachten, dass beim Grenzübergang die $<$ -Relation durch die \leq -Relation zu ersetzen ist. Dies kann am Beispiel $\frac{1}{n} > 0$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ eingesehen werden.

Somit ist L_1 eingeklemmt zwischen 1 und 1 und daher selber 1. Die Mathematiker verwenden für diesen Gedankengang die etwas widersprüchliche Formulierung „exakte Abschätzung“.

Aus $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ folgt unmittelbar: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = 1$. Wir werden diesen Sachverhalt im Folgenden verwenden.

2.2.2 Beweis für den zweiten Grenzwert

2.2.2.1 Geometrische Überlegung

Das grüne rechtwinklige Dreieck der Abbildung 2 hat die Hypotenusenlänge $2 \sin(\frac{h}{2})$. Der kleinere der beiden spitzen Winkel ist $\frac{h}{2}$. Daher misst die kurze Kathete $2 \sin(\frac{h}{2}) \sin(\frac{h}{2})$.

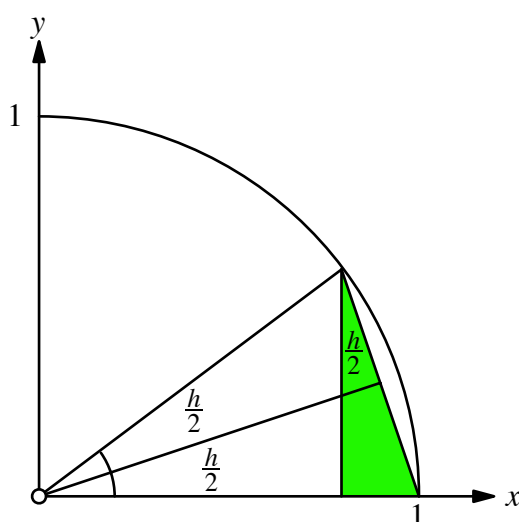


Abb. 2: Geometrische Überlegung

Andererseits ist die kurze Kathete auch $1 - \cos(h)$. Somit haben wir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(\frac{h}{2}) \sin(\frac{h}{2})}{h} = - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \sin(\frac{h}{2})}_0 \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}}_1 = -0$$

2.2.2.2 Berechnung mit Additionstheorem

Mit dem Additionstheorem für die Kosinusfunktion erhalten wir:

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = \frac{\cos(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - 1}{h} = \frac{\cos^2(\frac{h}{2}) - \sin^2(\frac{h}{2}) - 1}{h} = \frac{1 - 2 \sin^2(\frac{h}{2}) - 1}{h} = - \frac{\sin^2(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = - \sin(\frac{h}{2}) \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$$

Somit ist:

$$L_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{h}{2}\right)}_0 \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_1 = -0$$

2.3 Zusammenfassung

Für die Ableitung der Sinusfunktion gilt daher:

$$\frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t)$$

Uff.