Name:	
Matrikel-Nr.:	
Studienrichtung:	☐ Biologie ☐ Chemie ☐ Geowissenschaften ☐ Pharmazie ☐ _____

Hans Walser
Mathematik 1 für Naturwissenschaften, 25. Januar 2008, Version a)

Allgemeine Hinweise

- Die Prüfung dauert 2h.
- Bewertung: Es können maximal 60 Punkte erreicht werden. Jede der 6 Aufgaben ergibt maximal 10 Punkte. Für das Erreichen der Note 4 genügen 36 Punkte.
- Die Aufgaben können teilweise (Grafiken, Tabellen) auf diesem Aufgabenblatt gelöst werden. Ansonsten sind eigene Blätter zu verwenden. Bitte jedes Blatt mit dem Namen versehen.
- Die Lösungen müssen nachvollziehbar präsentiert werden — Zwischenresultate und Überlegungen sind auch anzugeben.
- Hilfsmittel: Keine Einschränkung, außer Kommunikation während der Prüfung.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.

Hans Walser und Assistententeam

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Total	**Note**
Punkte								

1 Taylor

a) Gesucht ist die Parabel vierten Grades, welche den Graphen der Funktion $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ am besten approximiert.

b) Wie groß ist die Differenz zwischen dem Funktionswert von $f(x)$ und dieser Approximation an der Stelle $x = 1$? (volle Rechengenauigkeit Ihres Taschenrechners verwenden)

Ergebnis

a) $p_4(x) = 2 + 4x^2 + \frac{4}{3}x^4$

b) Differenz = `0.1910580488`

Rechenweg

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x} \quad\Rightarrow\quad f(0)=2$$
$$f'(x)=2\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}\right) \quad\Rightarrow\quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=4\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}\right) \quad\Rightarrow\quad f''(0)=8$$
$$f'''(x)=8\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}\right) \quad\Rightarrow\quad f'''(0)=0$$
$$f''''(x)=16\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}\right) \quad\Rightarrow\quad f''''(0)=32$$

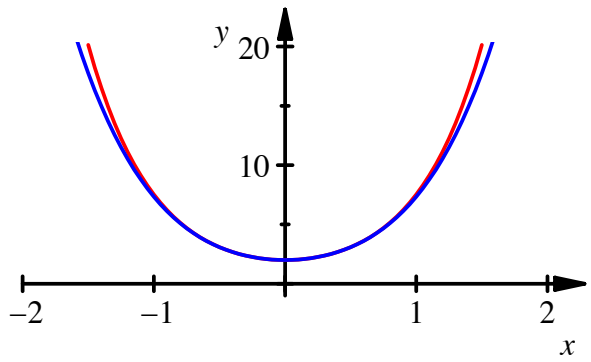
Daraus ergibt sich: $p_3(x)=2+\frac{8}{2}x^2+\frac{32}{24}x^4=2+4x^2+\frac{4}{3}x^4$

Taylor

```
f:=x->exp(2*x)+exp(-2*x):
taylor(f(x),x=0, AbsoluteOrder=5);
```

$$2+4\cdot x^2+\frac{4\cdot x^4}{3}+O\left(x^5\right)$$

MuPAD



Funktion und Approximation

Differenz:

```
f:=x->exp(2*x)+exp(-2*x):

g:=x->2+4*x^2+4/3*x^4:

d:=f(1)-g(1);
float(d);
```

$$\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{2}-\frac{22}{3}$$

0.1910580488

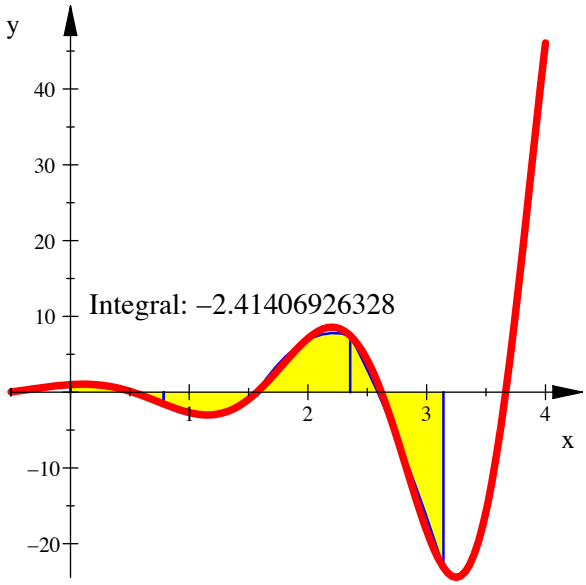
2 Partielle Integration

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(3x)\,\mathrm{d}x=$$

Gesucht ist das exakte Resultat. Schreiben Sie die einzelnen Schritte der partiellen Integration auf.

Ergebnis

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(3x)\,dx = \frac{1}{10}\left(-e^{\pi}-1\right) \approx -2.41406926328$$



Ergebnis

Erster Rechenweg

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos(3x)\,dx = \underbrace{\frac{1}{3} e^x \sin(3x)\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^{\pi} e^x \sin(3x)\,dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^x \sin(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\underbrace{e^x \cos(3x)\Big|_0^{\pi}}_{-e^{\pi}-1} + \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^{\pi} e^x \cos(3x)\,dx}_{I}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{9}\left(-e^{\pi}-1\right) - \frac{1}{9} I \\
9I &= \left(-e^{\pi}-1\right) - I \\
10I &= \left(-e^{\pi}-1\right) \\
I &= \frac{1}{10}\left(-e^{\pi}-1\right) \approx -2.41406926328
\end{aligned}$$

Zweiter Rechenweg

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos(3x)\,dx = \underbrace{e^x \cos(3x)\Big|_0^{\pi}}_{-e^{\pi}-1} + 3\underbrace{\int_0^{\pi} e^x \sin(3x)\,dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^x \sin(3x)\,dx = \underbrace{e^x \sin(3x)\Big|_0^{\pi}}_{0} - 3\underbrace{\int_0^{\pi} e^x \cos(3x)\,dx}_{I}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} I &= -e^{\pi} - 1 - 9I \\ 10I &= -e^{\pi} - 1 \\ I &= \tfrac{1}{10}\left(-e^{\pi} - 1\right) \approx -2.41406926328 \end{aligned}$$

MuPAD

```
f:=exp(x)*cos(3*x):
Int(f, x=0..PI)=int(f, x=0..PI);
float(int(f, x=0..PI));
```

$$\mathrm{Int}\left(\cos(3\cdot x)\cdot e^{x},\ x = 0..\pi\right) = -\frac{e^{\pi}}{10} - \frac{1}{10}$$

$$-2.414069263$$

Bemerkung: Unbestimmtes Integral:

```
f := cos(3*x)*exp(x):
F := int(f,x);
```

$$\frac{e^{x}\cdot(\cos(3\cdot x) + 3\cdot\sin(3\cdot x))}{10}$$

3 Differenzialgleichung

Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y'' = py$$

a) für $p = -1$

b) für $p = -3$

Bearbeitung

a) Für $p = -1$ haben wir $y'' = -y$ mit der Lösung $y = A\cos(t) + B\sin(t)$

```
Dgl:=ode(y''(x)=-y(x), y(x)):
solve(Dgl,y(x));
```

$$\{C2 \cdot \cos(x) - C3 \cdot \sin(x)\}$$

b) Für $p = -3$ ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 3 = 0$$
$$\rho = 0; \quad \omega = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$
$$y = A\cos\left(\sqrt{3}t\right) + B\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

```
Dgl:=ode(y''(x)=-3*y(x), y(x)):
solve(Dgl,y(x));
```

$$\{C2 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot x) - C3 \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot x)\}$$

4 Newton

$f(x) = x^2 + 9x - 22$

a) Berechnen Sie die Nullstellen exakt.

b) Approximation nach Newton. Wählen Sie den Startwert $x_0 = 7$ und berechnen Sie die Werte x_1, x_2, x_3

c) Approximation nach Newton. Wählen Sie den Startwert $x_0 = -7$ und berechnen Sie die Werte x_1, x_2, x_3

Bearbeitung

a) $x^2 + 9x - 22 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = 2, \quad x^{**} = -11$

b) Rekursionsformel nach Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + 9x_n - 22}{2x_n + 9}$$

Mit dem Startwert $x_0 = 7$ erhalten wir:

$$x_0 = 7$$
$$x_1 \approx 3.0869565217$$
$$x_2 \approx 2.0778622150$$
$$x_3 \approx 2.0004608279$$

Excel:

n	x[n]
0	7.0000000000
1	3.0869565217
2	2.0778622150
3	2.0004608279
4	2.0000000163
5	2.0000000000
6	2.0000000000

c) Mit dem Startwert $x_0 = -7$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_0 &= -7 \\ x_1 &\approx -14.2000000000 \\ x_2 &\approx -11.5278350515 \\ x_3 &\approx -11.0198218825 \end{aligned}$$

Excel:

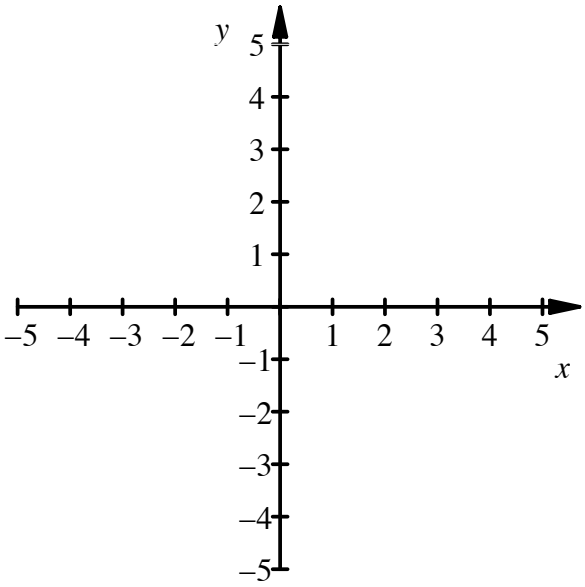
n	x[n]
0	-7.0000000000
1	-14.2000000000
2	-11.5278350515
3	-11.0198218825
4	-11.0000301317
5	-11.0000000001
6	-11.0000000000

5 Umkehrfunktion

$f(x) = x^3 - 5x, \quad x \in \mathbb{R}$

a) Nullstellen?

b) Skizze des Funktionsgrafen



Funktionsgraf?

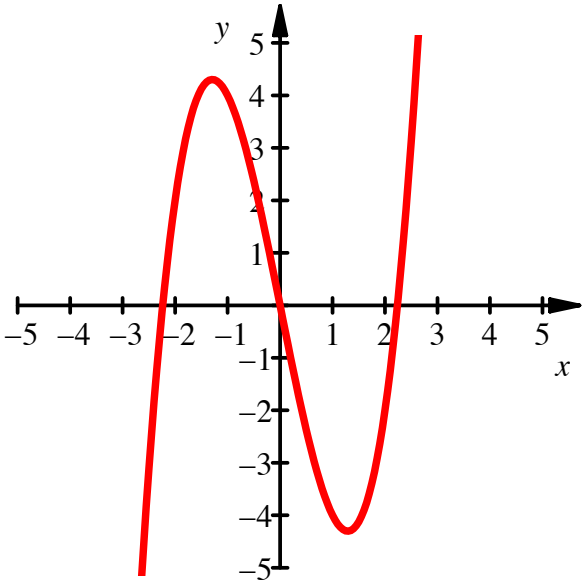
c) Warum hat die Funktion f **keine** Umkehrfunktion?

d) Geben Sie ein Beispiel eines eingeschränkten Definitionsbereiches für f an, so dass f eine Umkehrfunktion hat.

Bearbeitung

a) $x^3 - 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{-\sqrt{5}, 0, +\sqrt{5}\right\}$

b) Skizze des Funktionsgrafen



Funktionsgraf

c) Nicht bijektiv. Für zum Beispiel $y = 0$ gibt es mehrere passende x-Werte.

d) Beispiele: $\left]-\infty, -\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right]$, $\left[-\sqrt{\tfrac{5}{3}}, \sqrt{\tfrac{5}{3}}\right]$, $\left[\sqrt{\tfrac{5}{3}}, \infty\right[$

6 Differenzialgleichung

$$y'(x) = y(x)\sin(x) - 3\sin(x)$$

Ergebnis

$$y(x) = A\mathrm{e}^{-\cos(x)} + 3$$

Bearbeitung

Es gibt drei verschiedene Lösungswege:

Umformung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\sin(x) - 3\sin(x) = \sin(x)(y-3)$$

Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{y-3} &= \sin(x)\mathrm{d}x\\ \ln(|y-3|) &= -\cos(x) + C\\ y(x) &= A\mathrm{e}^{-\cos(x)} + 3\end{aligned}$$

Partikuläre Lösung erraten

Homogene Differenzialgleichung mit Separation der Variablen lösen:

$$\begin{aligned}y'(x) &= y(x)\sin(x)\\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \sin(x)\mathrm{d}x\\ \ln(|y|) &= -\cos(x) + C\\ y_{\mathrm{H}}(x) &= A\mathrm{e}^{-\cos(x)}\end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist $y_{\mathrm{P}}(x) = 3$. Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung:

$$y(x) = A\mathrm{e}^{-\cos(x)} + 3$$

Variation der Konstanten

Für die homogene Differenzialgleichung erhalten wir mit Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}y'(x) &= y(x)\sin(x)\\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \sin(x)\mathrm{d}x\\ \ln(|y|) &= -\cos(x) + C\\ y_{\mathrm{H}}(x) &= A\mathrm{e}^{-\cos(x)}\end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Methode der Variation der Konstanten. Ansatz:

$$y_P(x) = a(x)e^{-\cos(x)}$$

Daraus ergibt sich:

$$y_P'(x) = a'(x)e^{-\cos(x)} + \underbrace{a(x)\sin(x)e^{-\cos(x)}}_{=\sin(x)y_P(x)}$$

Vergleich mit $y'(x) = y(x)\sin(x) - 3\sin(x)$ führt auf:

$$\begin{aligned} a'(x)e^{-\cos(x)} &= -3\sin(x) \\ a'(x) &= -3\sin(x)e^{\cos(x)} \\ a(x) &= -3\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx \end{aligned}$$

Das Integral $-3\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx$ lösen wir mit der Substitutionsmethode:

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos(x) \\ du &= -\sin(x)dx \end{aligned}$$

Damit wird:

$$a(x) = -3\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx = +3\int e^u du = 3e^u = 3e^{\cos(x)}$$

Somit erhalten wir:

$$y_P(x) = a(x)e^{-\cos(x)} = 3e^{\cos(x)}e^{-\cos(x)} = 3$$

Und schließlich:

$$y(x) = Ae^{-\cos(x)} + 3$$

CAS (Beispiel MuPAD)

```
Dgl:=ode(y'(x)=y(x)*sin(x)-3*sin(x), y(x)):

solve(Dgl,y(x));


{C2*exp(-cos(x)) + 3}
```