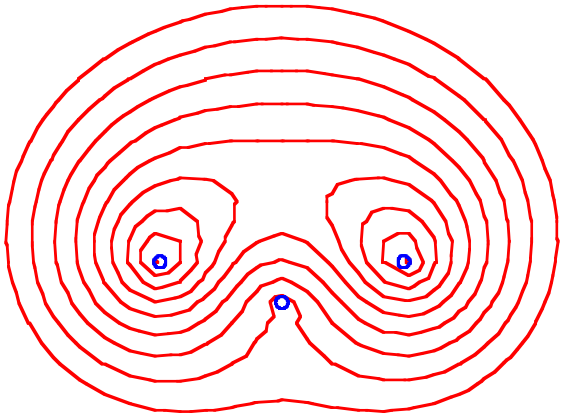
Hans Walser

Optimierung in der Geometrie

Kurzfassung für Neugierige



Tagung des GDM-Arbeitskreises Geometrie

Marktbreit, 15.-17. September 2006

Experimentelle Geometrie

Inhalt

1 Wie bitte? 2
2 Reflexion 3
3 Drei Punkte 6
4 Minimales Wegenetz im Dreieck 7

Geometrie ist die Visualisierung der Wahrheit.

Abstract

Für Optimierungsprobleme in der Geometrie bieten sich Experimente auf drei Ebenen an:

- Reale Experimente
- Simulierte Experimente mit DGS
- Gedankenexperimente

Der Vortrag bringt Beispiele, die zu allen drei Ebenen passen. Die Tagungsteilnehmer sind eingeladen zum Mitdenken, Mitverfolgen am Bildschirm, und können selber Hand anlegen. Es gibt saubere Finger dabei.

1 Wie bitte?

Der Auslöser zu den folgenden Überlegungen war die Frage eines Studierenden:

Gibt es eine Ellipse mit drei Brennpunkten?

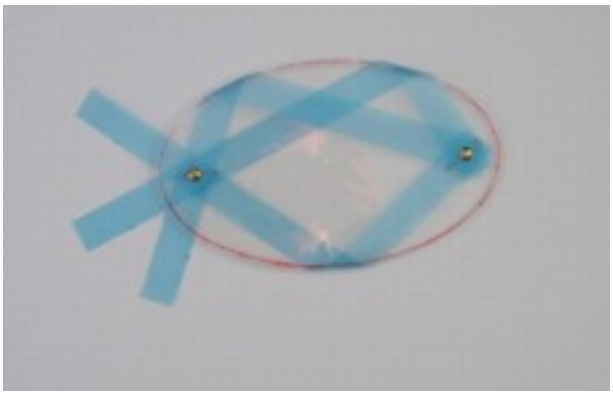
- Suchen Sie dumme Fragen zum Thema *Dreiheit*.

Zu einer üblichen Ellipse mit zwei Brennpunkten stellen sich zwei Assoziationen ein:

1. Die „Gärtnerkonstruktion“: Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten konstant ist.
2. Die Reflexionseigenschaft: Strahlen, welche vom einen Brennpunkt ausgehen, werden an der Ellipse so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch den anderen Brennpunkt verläuft.

Welche der beiden Assoziation ist passend für eine Verallgemeinerung auf drei Brennpunkte?

- Experiment zur Ellipse



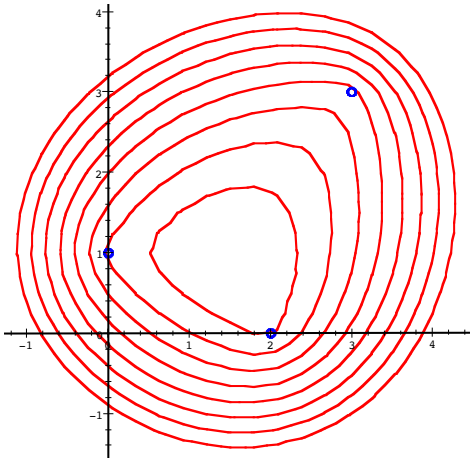
Wie heißt dieser Fisch?

- Ellipse mit drei Brennpunkten

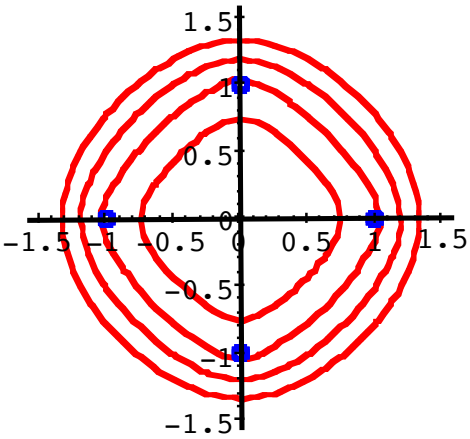
Die Abstandsdefinition der Ellipse lässt sich leicht verallgemeinern: Es soll nun die Summe der Abstände von *drei* Punkten konstant sein.

Zu den drei Punkten $F_1(0,1)$, $F_2(2,0)$, $F_3(3,3)$ plotten wir Niveaulinien der Funktion:

$$z(x,y)=\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

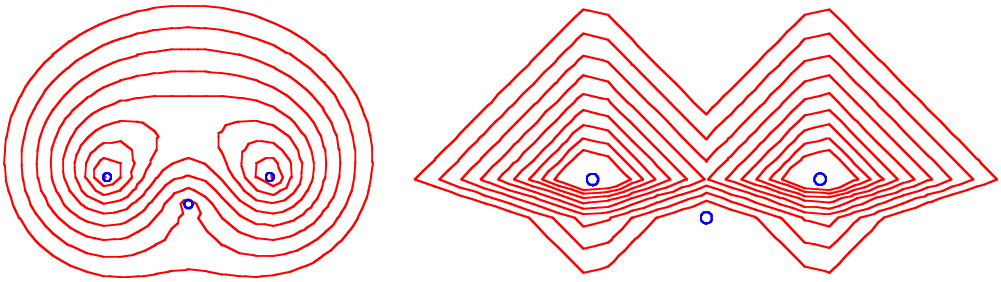


Ellipsen mit drei Brennpunkten



Ellipsen mit vier Brennpunken

- Lassen sich diese Kurven auch mit Hilfe einer Schnur konstanter Länge realisieren?
- Was ergibt sich, wenn die drei Brennpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden?
- Mehr als drei Brennpunkte?
- Lassen sich diese Kurven auch mit dynamischer Geometrie-Software zeichnen?
- Hyperbeln?



Hyperbeln

- Was ergibt sich, wenn wir die Abstände gewichten, also zum Beispiel einen Abstand doppelt rechnen?
- Mehr als drei Brennpunkte
- Taxi Cab Geometry?

2 Reflexion

Fernziel: Wie geht das mit drei Strahlen?

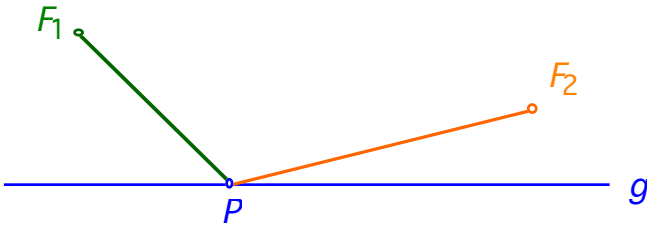
Nahziel: Experimente mit gewöhnlicher Reflexion

- Experiment: Der Schuss in den Spiegel

Ein Cousin aus der Familiengeschichte schoss mit der Pistole auf sein eigenes Spiegelbild. Der Spiegel reflektierte das Geschoß. Treffer.

- Das Pferd will zur Tränke

Das Beispiel ist eine Kultaufgabe der Spiegelungsgeometrie: Ein Reiter möchte auf kürzestem Weg von F_1 nach F_2 reiten, dazwischen aber sein Pferd am Bach g tränken. Gesucht ist also der kürzeste Weg von F_1 nach F_2 über einen beliebigen Punkt P auf g. Ein Optimierungsproblem also.



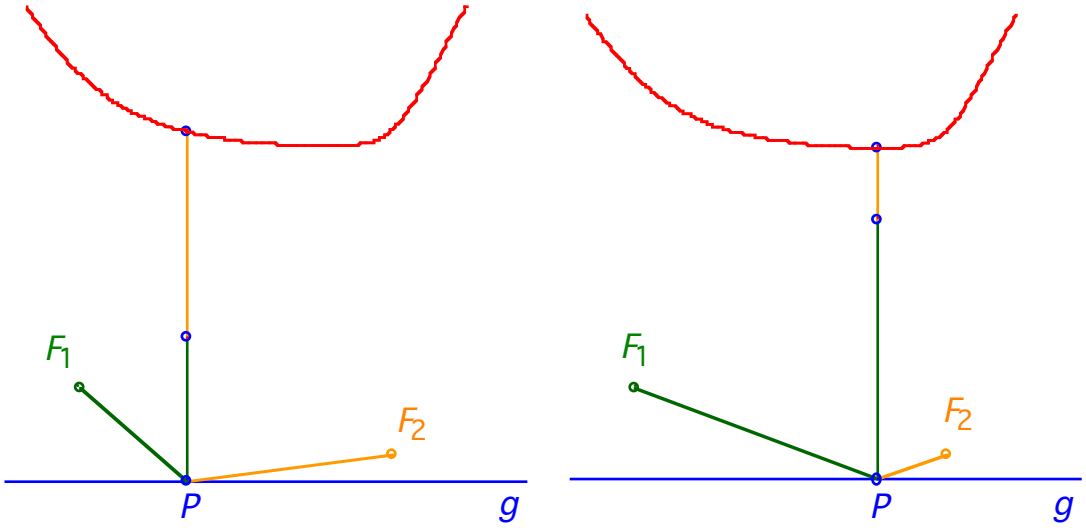
Optimaler Weg?

Ich fand diese Fragestellung als Gymnasiast Ende der fünfziger Jahre des abgelaufenen Jahrhunderts in einer Lernumgebung. Reiter gab es damals keine mehr, hingegen waren alle Bäche begradigt.

- Experiment mit Faden und Plexiglas

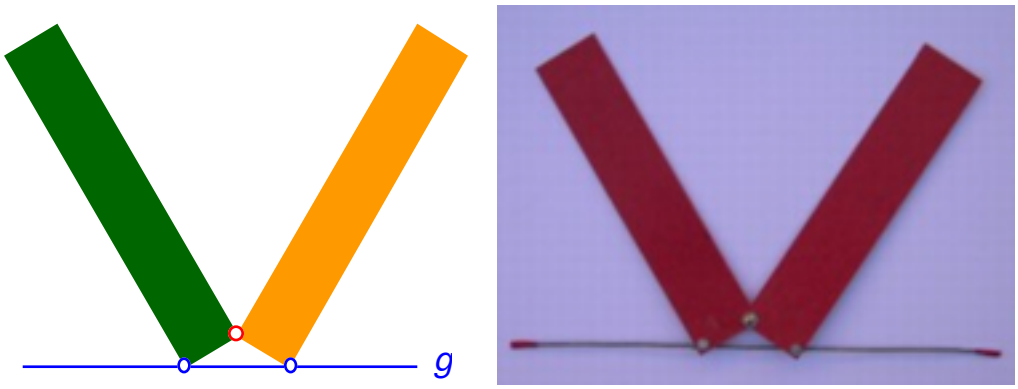
Kürzester Weg über die Oberkante

- Experiment mit DGS



Summe der Abstände, optimaler Punkt

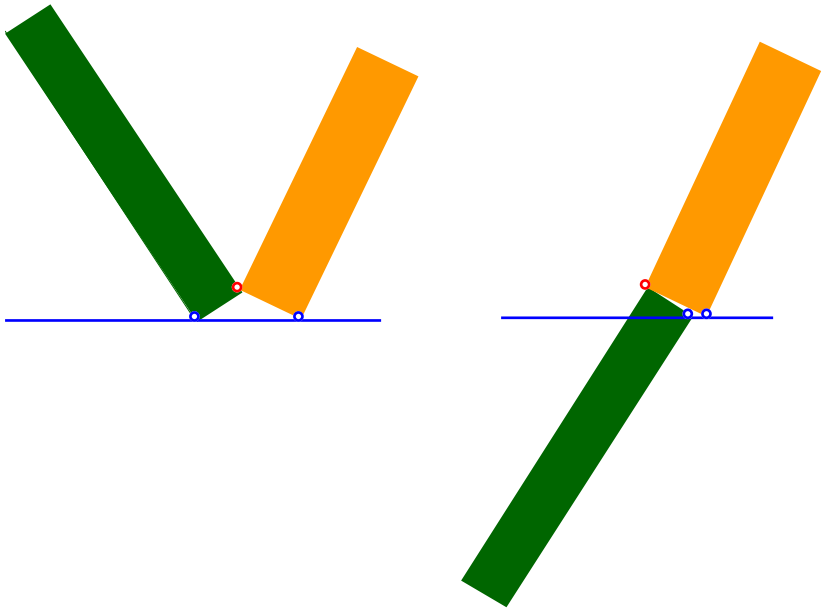
- Gerät zur Reflexion



Gelenkmodell

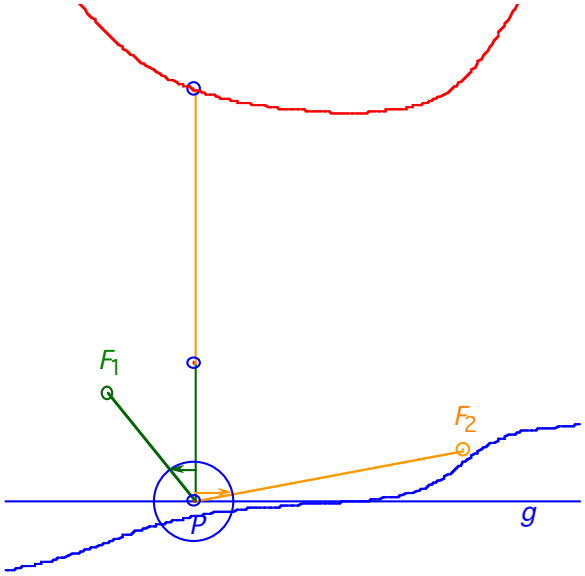
- Ungleiche Streifenbreite

Wir können auch mit ungleichen Streifenbreiten arbeiten. Wenn wir „überdrehen“, erhalten wir eine Illustration des Brechungsgesetzes von Snellius (1580-1626).



Ungleiche Streifenbreiten

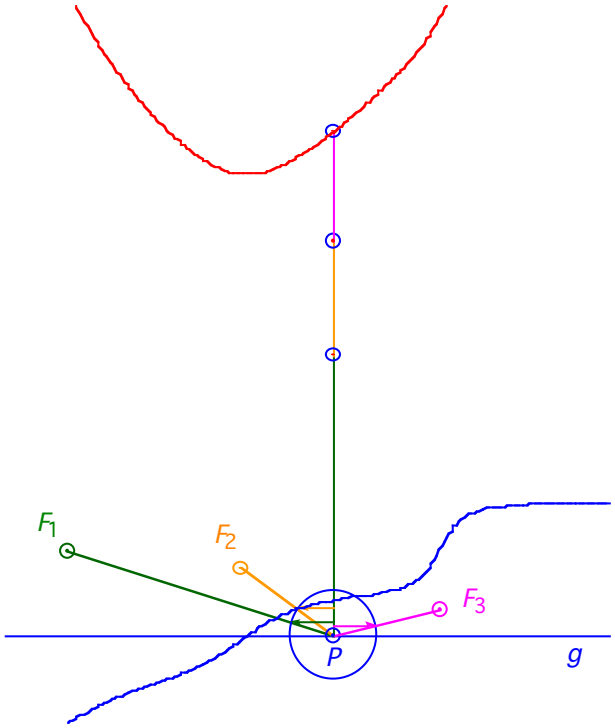
- Spiel mit Sinuswerten



Sinuswerte

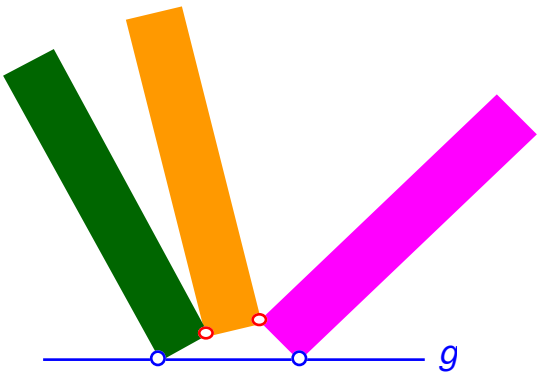
Reflexion: $\sin(\phi_1)+\cdots+\sin(\phi_n)=\sum_{i=1}^{n}\sin(\phi_i)=0$

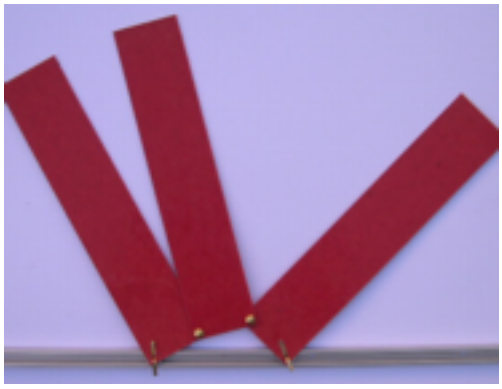
3 Drei Punkte



Abstände zu drei Punkten

- Wie kann zu zwei Strahlen der dritte konstruiert werden, so dass die Reflexionseigenschaft erfüllt ist?
- Mechanisches Gerät



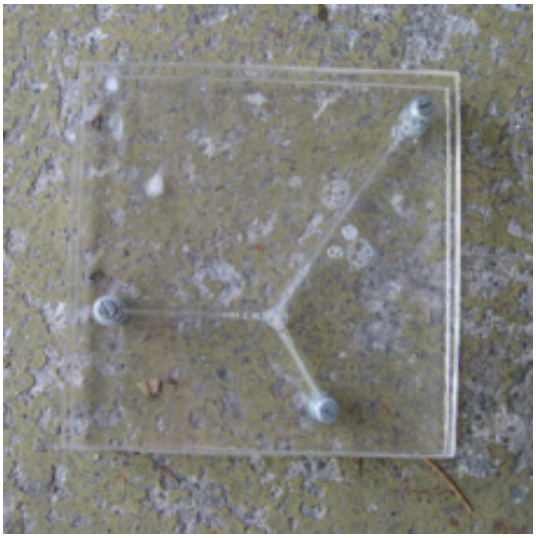


Gelenkmodell

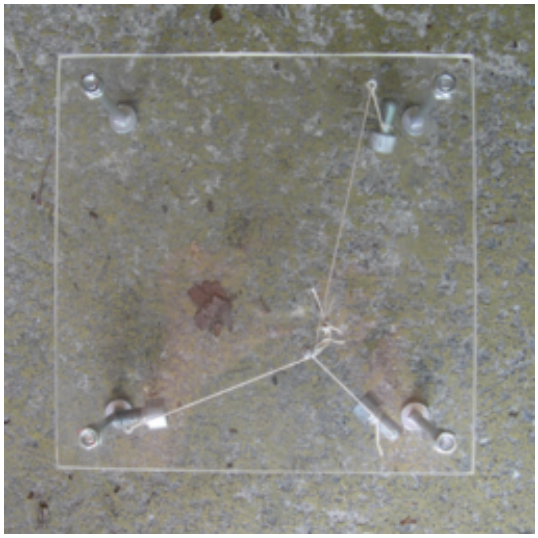
- Warum funktioniert dieses Modell?
- Sonderfälle:
- Ein Brennpunkt sitzt auf der Geraden
- Alle Brennpunkte auf der Geraden

4 Minimales Wegenetz im Dreieck

- Experiment mit Seifenlauge
- Experiment mit der Schwerkraft



Fermat-Punkt mit Seifenlauge



Schwerkraft