Hans Walser

Invariante Flächensummen

Österreichische Fortbildungstagung für Geometrie
42. Tagung, 10-12. November 2022
BIFEB, Bundesinstitut für Erwachsenenbildung
Strobl am Wolfgangsee

Abstract

Einige geometrische Sätze, insbesondere der Satz des Pythagoras, werden unter dem Aspekt der invarianten Flächensumme untersucht. Diese neue Sichtweise ermöglicht ein ganzes Feld von Verallgemeinerungen und zugehörigen Illustrationen.

1 Invarianz bei Pythagoras

Der Witz des Satzes von Pythagoras ist nicht, wie man in der Schule ausgiebig lernt, dass $a^2 + b^2 = c^2$ ist, sondern dass $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$ ist, auch wenn in der Zwischenzeit der Punkt C auf dem Thaleskreis bewegt wurde (Abb. 1). Die Invarianz der Flächensumme der beiden Kathetenquadrate also. Das c^2 ergibt sich dann als Grenzfall.

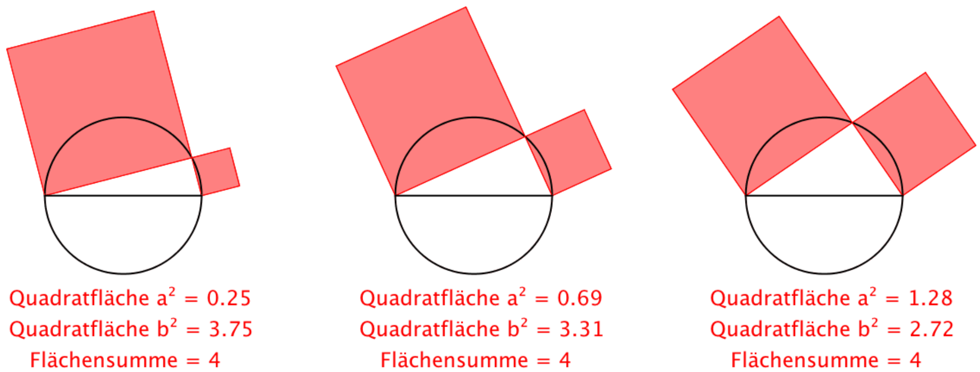


Abb. 1: Das eine gibt, das andere nimmt

2 Auf der Sinuskurve

Eine invariante Flächensumme von zwei Quadraten gibt es auch auf der Sinuskurve (Abb. 2).

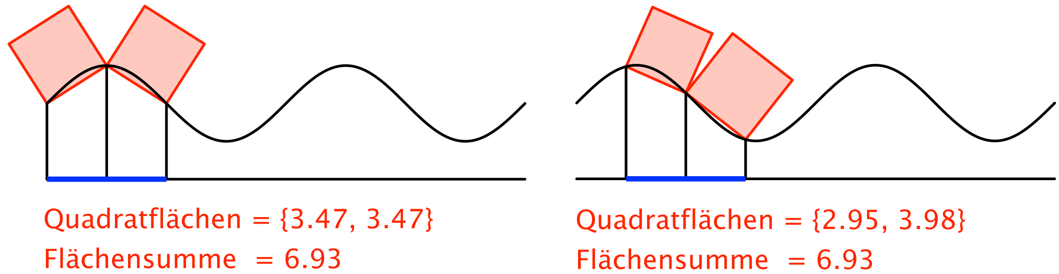


Abb. 2: Die Fahrt auf der Sinuskurve

Die Länge der blau eingezeichneten Basis ist die halbe Periodenlänge.

3 Als ich das erste Mal auf dem Dampfwagen saß

Es geht auch mit fünf Quadraten (Abb. 3).

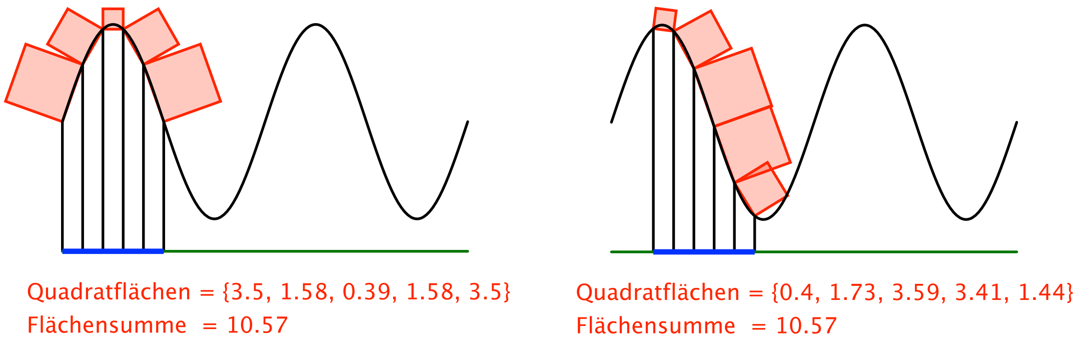


Abb. 3: Als ich das erste Mal auf dem Dampfwagen saß

Die blaue Basislänge ist wiederum die halbe Periodenlänge. Dass es schon mit der halben Periodenlänge geht, hat mit der Schubspiegelsymmetrie zu tun (Abb. 4).

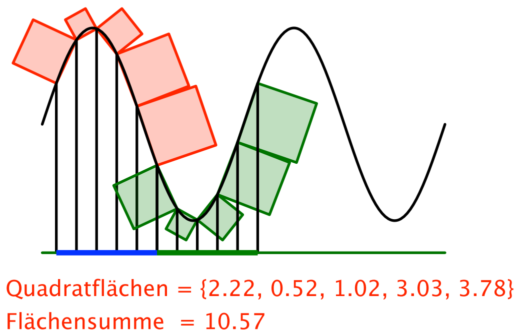


Abb. 4: Schubspiegelsymmetrie

4 Achterbahn (Lissajous-Kurve)

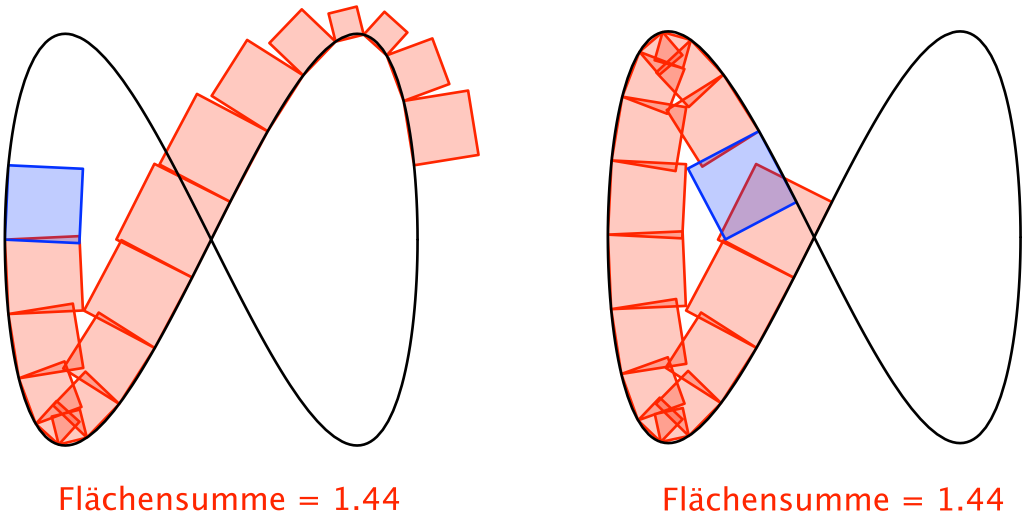


Abb. 5: Achterbahn mit blauer Lok

Die Lok schrammt knapp am letzten Wagen vorbei (Abb. 6). Hat natürlich mit der halben Periodenlänge zu tun.

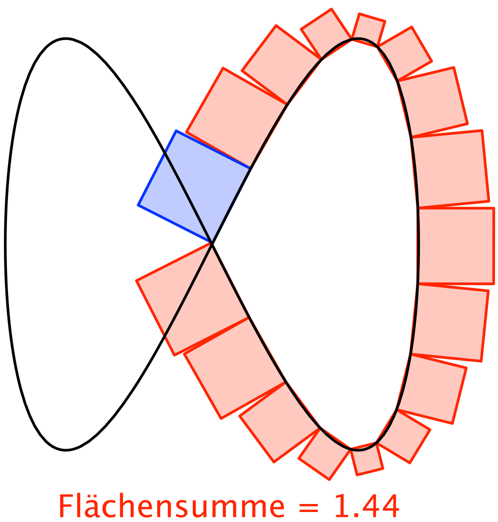
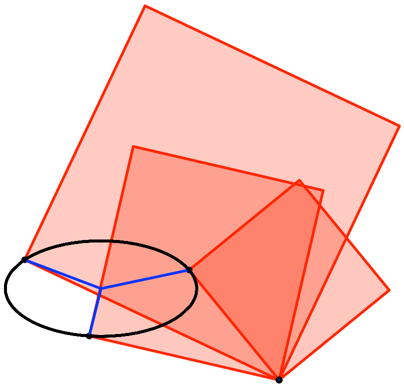


Abb. 6: Die Lok schrammt knapp am letzten Wagen vorbei

5 Externer Pivot

Wer den Dreistern (Abb. 7) räumlich sieht und sich wundert, dass die Quadrate aufgestellt sind, ist selber schuld. Die drei bewegten Quadratecken fahren auf einer Ellipse.



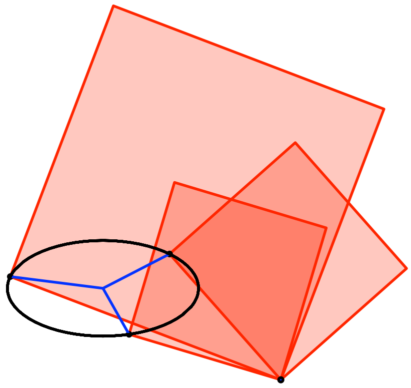


Abb. 7: Externer Pivot

6 Schlüsselformeln

Für den Nachweis der invarianten Flächensummen sind die folgenden Formeln hilfreich.

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\left(t + k\frac{2\pi}{n}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(t + k\frac{2\pi}{n}\right) = 0$$

Sowie

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(t + k\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(t + k\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}$$

Der Beweis läuft über regelmäßige n-Ecke.

Für $n = 3$ sind wir in der Situation des Dreiphasenstroms. Da die Spannungssumme null ist, braucht es keinen Rücklauf. Daher ist die Anzahl der Drähte bei Überlandleitungen immer ein Vielfaches von drei (Abb. 8).

Abb. 8: Überlandleitung

7 Der gute alte Pythagoras

In der Schule wird der Satz des Pythagoras oft mit horizontaler Hypotenuse dargestellt (Abb. 9). Der Punkt C bewegt sich auf dem Thaleskreis. Dies entspricht dem antiken Weltbild mit einer festen horizontalen Erde (die Hypotenuse) und einer Sonne C welche bei A im Osten aufgeht, den Sonnenkreis beschreibt und dann im Westen bei B untergeht.

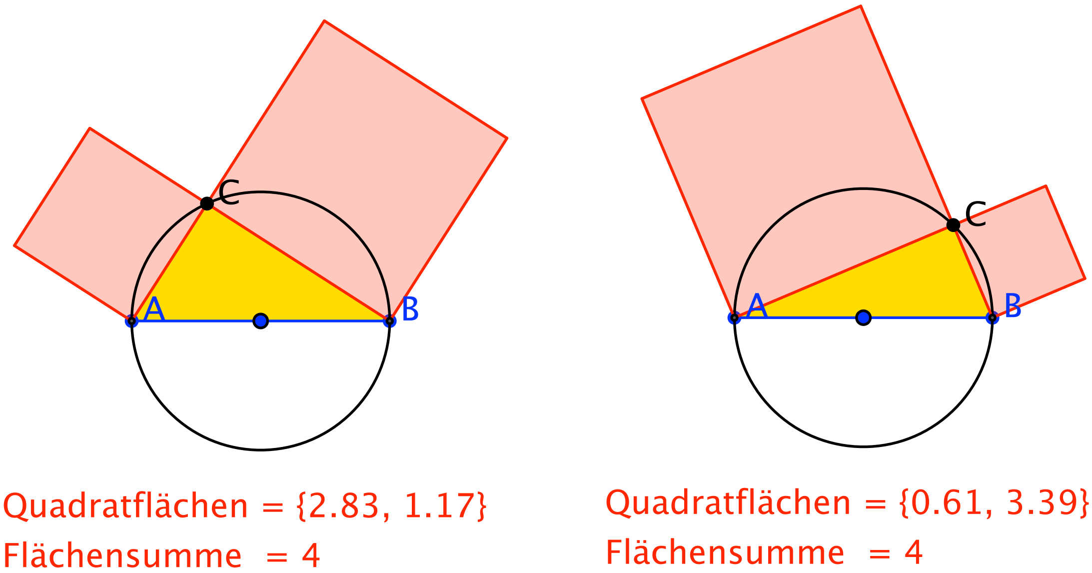


Abb. 9: Klassische Darstellung

Nun ja, und in der Nacht geht sie untendurch zurück (Abb. 10).

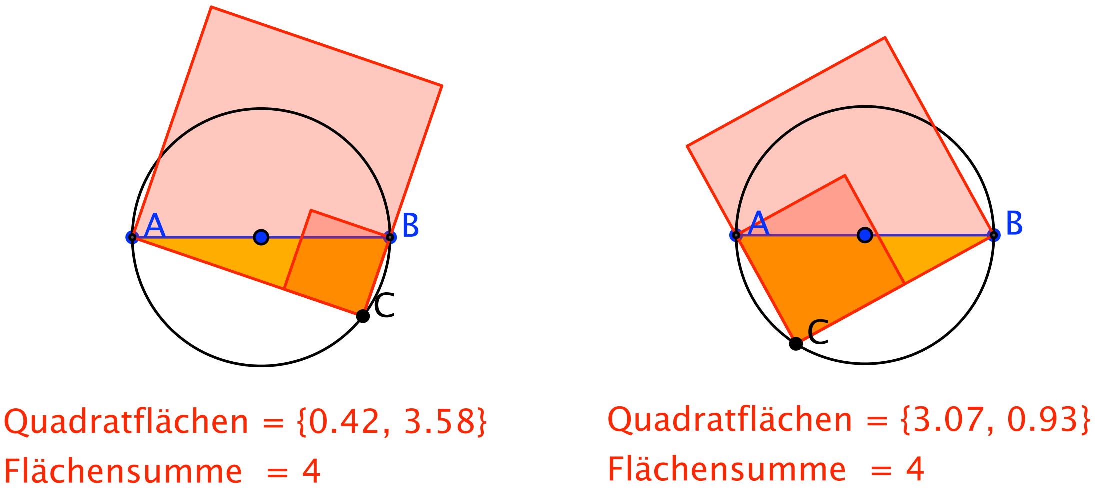


Abb. 10: Pythagoras bei Nacht

8 Die kopernikanische Wende

Der Punkt C bleibt fest, die Hypotenuse dreht sich (Abb. 11).

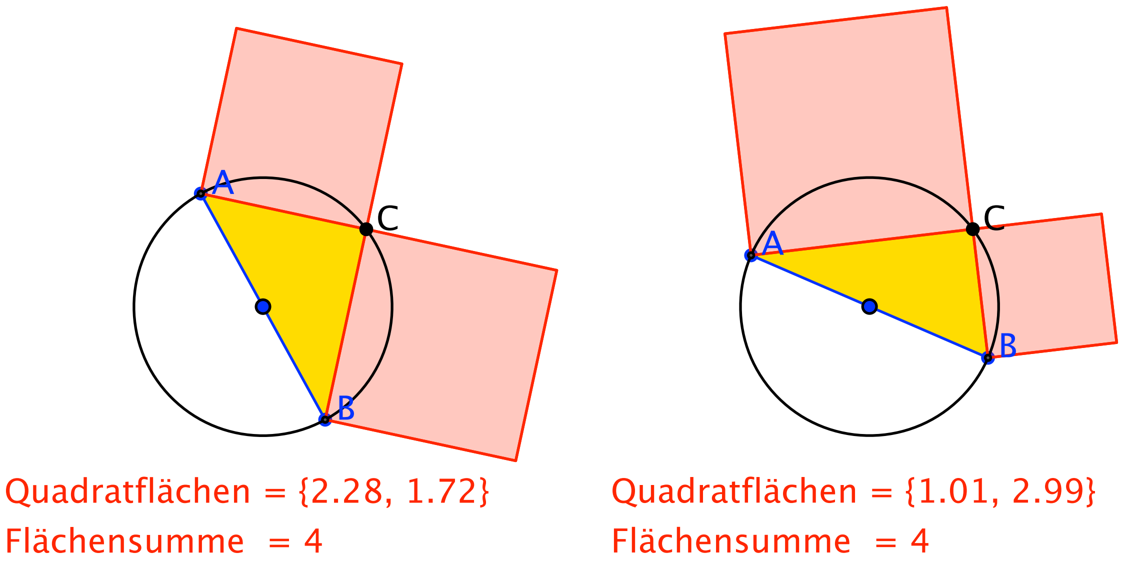


Abb. 11: Umgekehrte Sicht. Propeller

9 Apollonios / al Sijzi

Das geht auch, wenn der Punkt C weiter weg ist (Abb. 12) (Sätze von Apollonios und al Sijzi). Wir haben dann kein rechtwinkliges Dreieck mehr.

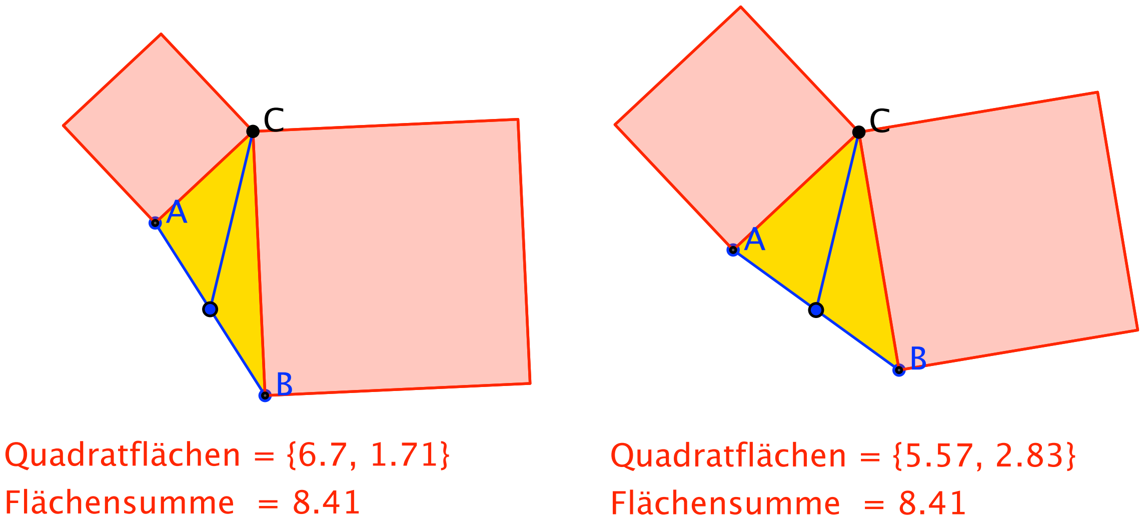


Abb. 12: Kein rechtwinkliges Dreieck

Natürlich könnte man auch die Grundlinie AB festhalten und C auf einem Kreis um den Mittelpunkt der Grundlinie variieren.

10 Allgemein

Die Figur aus den Punkten $A_1, \ldots, A_n$ dreht sich um ihren Schwerpunkt S. Weiter sei C ein externer fester Punkt. Dann ist die Summe der Quadrate der Abstände von C zu den Punkten $A_1, \ldots, A_n$ invariant.

Hier ein Beispiel mit drei Punkten (Abb. 13).

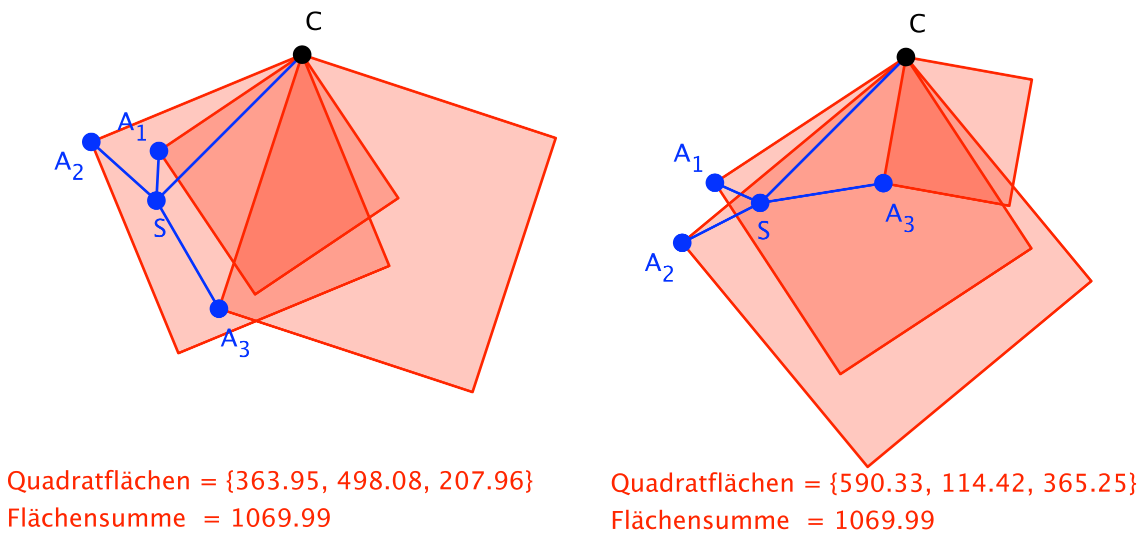


Abb. 13: Drehen um Schwerpunkt

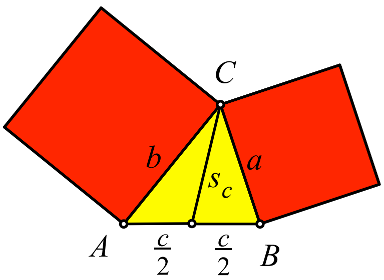
Beweis: Wir setzen $A_k{:}(x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Den Schwerpunkt S setzen wir in den Ursprung, also $S{:}(0, 0)$. Somit ist:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k = 0$$

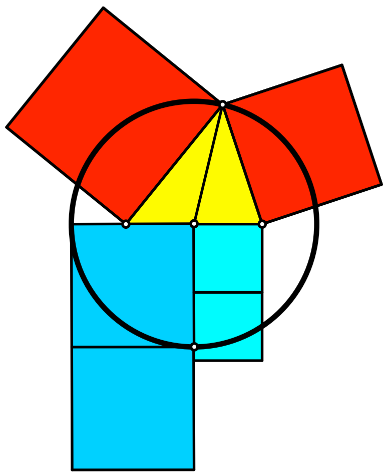
Weiter sei C:(x_C, y_C). Für die Summe der Quadrate der Abstände von C zu den Punkten $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} d\left(C, A_k\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(\left(x_k - x_C\right)^2 + \left(y_k - y_C\right)^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 + y_k^2\right) - 2x_C \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k}_{=0} - 2y_C \underbrace{\sum_{k=1}^{n} y_k}_{=0} + n\left(x_C^2 + y_C^2\right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} d\left(S, A_k\right)^2}_{\text{konstant}} + n \underbrace{d\left(SC\right)^2}_{\text{konstant}}\end{aligned}$$

11 Einfachstes Beispiel: Apollonios / al Sijzi



a)



b)

Abb. 14: Einfachstes Beispiel. Rot = blau

Bei einem Dreieck ABC (Abb. 14a) erhalten wir:

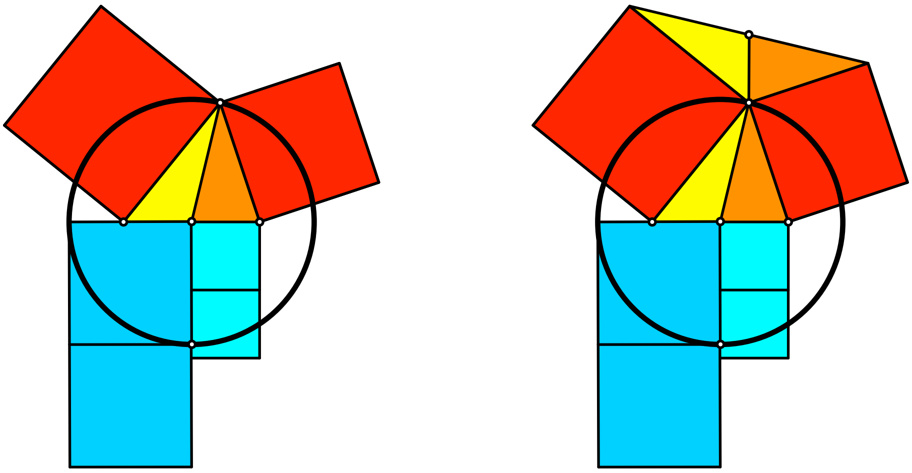
$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2s_c^2$$

Der Sachverhalt kann gemäß Abbildung 14b visualisiert werden.

Im Sonderfall eines rechtwinkligen Dreieckes wird der blaue Teil zum Hypotenusenquadrat und wir erhalten den Satz des Pythagoras zurück.

12 Umbau der Figur

Wir zerlegen das Dreieck durch die Schwerlinie s_c in zwei Teile (Abb. 15a). Diese Teile können wir in anderer Anordnung oben ansetzen (Abb. 15b). Das Dreieck kann mit einem Gelenk umgeklappt werden (Abb. 16).



a) b)

Abb. 15: Umbau der Figur

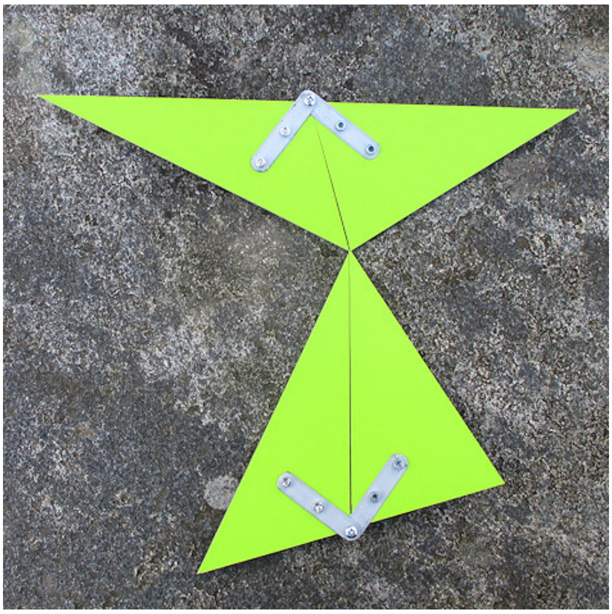


Abb. 16: Umklappen des Dreiecks

Nun können wir die blauen Quadrate anders anordnen (Abb. 17).

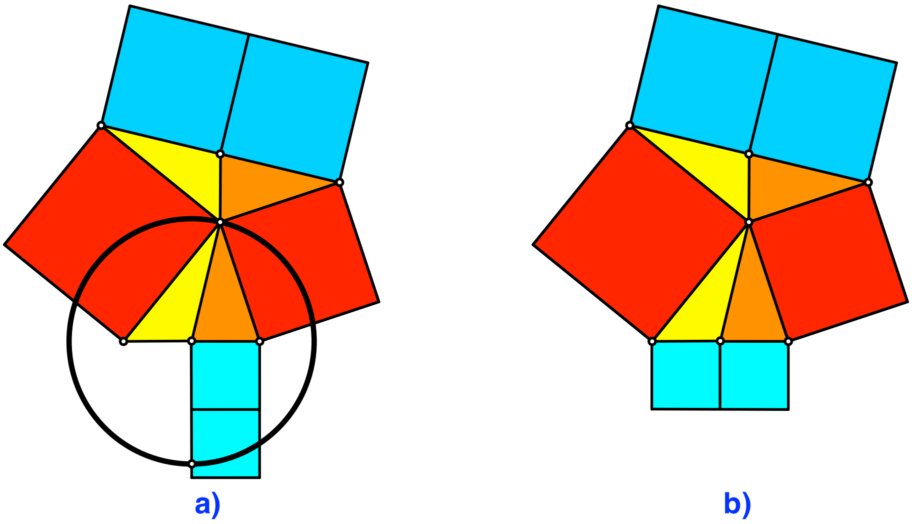


Abb. 17: Andere Anordnung der blauen Quadrate

Schließlich bauen wir die blauen Rechtecke in Quadrate um (Abb. 18).

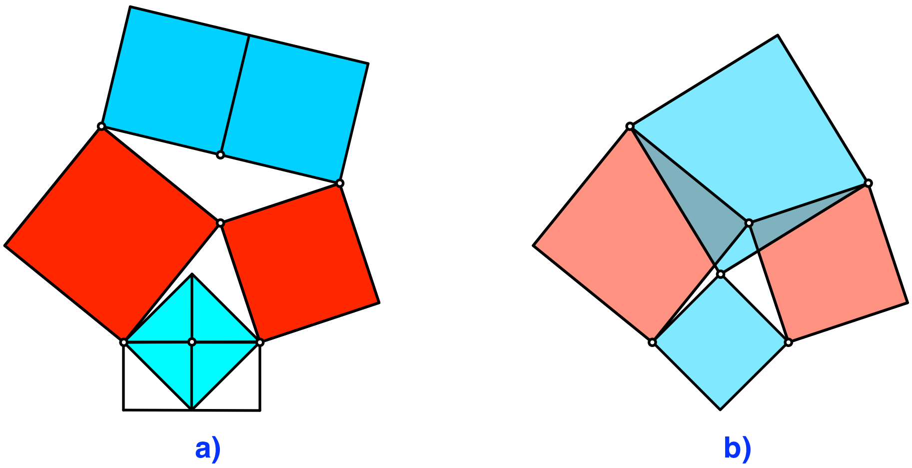


Abb. 18: Umbau der Rechtecke. Schließungsfigur

Erstaunliches geschieht. Die blauen Quadrate haben ebenfalls eine Ecke gemeinsam, wie die roten.

Auf Grund unserer Herleitung ist die Flächensumme der blauen Quadrate gleich der Flächensumme der roten.

13 Papillon

Die Figur der Abbildung 18b hat einige merkwürdige Eigenschaften. Die Umkreise der vier Quadrate verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt (Abb. 19a). Ihre Mittelpunkt, also auch die Mittelpunkte der vier Quadrate, bilden ein fünftes Quadrat (Abb. 19b).

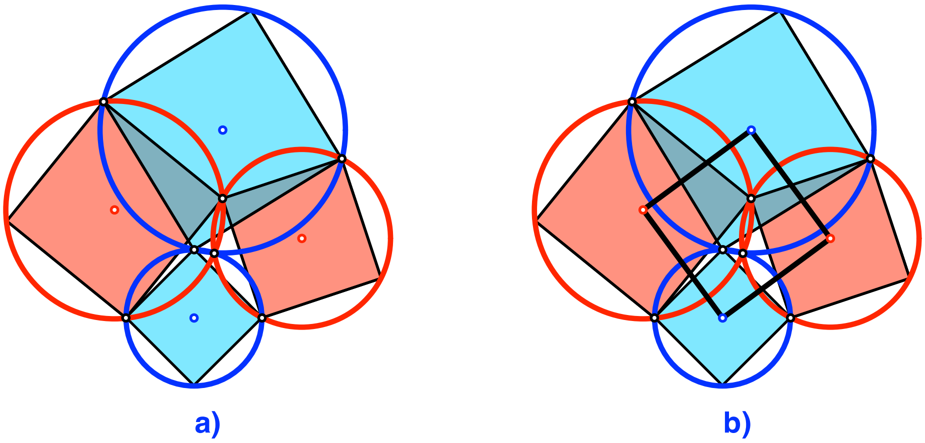


Abb. 19: Umkreise

Die Diagonalverbindungen der Außenecken sind orthogonal und gleich lang (Abb. 20a). Ihre Mittelpunkte sind die Kontaktpunkte gleichfarbiger Quadrate. Die Diagonalen schneiden sich im gemeinsamen Schnittpunkt der vier Umkreise. Die Diagonalverbindungen der rot-blau-Gelenkpunkte sind ebenfalls orthogonal und gleich lang und schneiden sich ebenfalls im gemeinsamen Schnittpunkt (Abb. 20b). Zu den Diagonalen der Außenecken haben sie einen Winkel 45°. Das Längenverhältnis der langen Diagonalen zu den kurzen ist die Quadratwurzel aus 2.

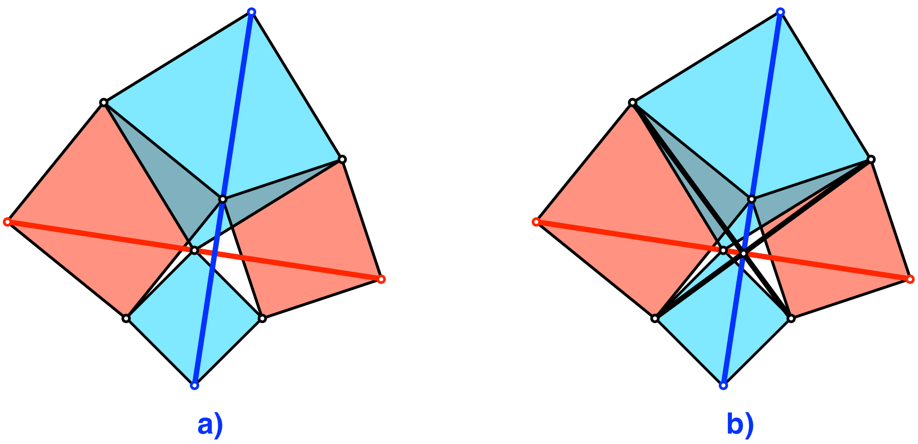


Abb. 20: Diagonalen

Die Abbildung 21 zeigt die Papillon-Spirale.

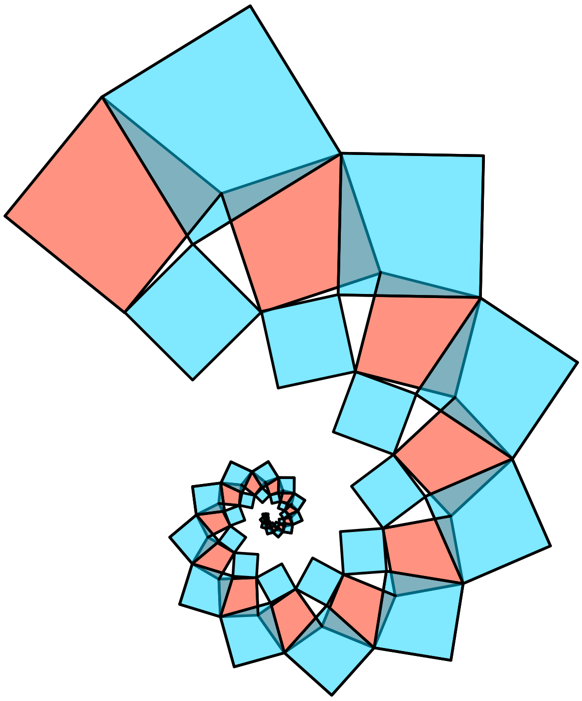


Abb. 21: Papillon-Spirale

Last modified: 22. Mai 2022

Websites

Hans Walser: Invariante Flächensummen. Vortragsseite
http://www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/20221110-12/index.html

Literatur

Walser, Hans (2021): Spiel mit Quadraten. MU, Der Mathematikunterricht. Jahrgang 67. Heft 3-2021. S. 17-27. ISSN 0025-5807.