Weiter ist

$$(21)\quad w=\frac{s^2}{2z_3}\left(1-\frac{y_3}{y_1}\right)=s\sqrt{\frac{1}{40}\left(125+41\sqrt{5}\right)}.$$

Damit erhält man

$$(22)\quad R=\sqrt{v^2+w^2}=\frac{s}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(29+9\sqrt{5}\right)}.$$

Da die ausgewählte Ecke keine speziellen Eigenschaften hat, denn alle Ecken sind kongruent, so liegen alle 60 Ecken auf der Kugel (19). Der Durchmesser dieser Kugel beträgt 4,956 s oder rund 5 s.

Ergebnis: Damit haben wir das Fußballpolyeder als sehr schön regelmäßig erkannt, aber zu den regulären Polyedern oder platonischen Körpern gehört es nicht. In jüngster Zeit ist das Fußballpolyeder für Chemiker von Interesse geworden, weil eine neue Kohlenstoffmodifikation entdeckt wurde, deren Makromolekül aus 60 Kohlenstoffatomen besteht und die Fußballpolyederstruktur hat.

Literatur

[1] *Duseberg, T.*: Ein abgestumpftes Ikosaeder als Grundfigur der Fußballnähte. **PM 24** (1982) 88f.

[2] *Strick, H. K.*: Fußball-Bundesliga und Stochastik-Unterricht. **PM 24** (1982) 269-276.

[3] *Danckwerts, R./Vogel, D.*: Abzählen rund um den Fußball. **PM 27** (1985) 151f u. 169.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Wolfgang Dörband, Dostojewskistraße 3 A,
D-17491 Greifswald

Geschlossene Korbbögen

Hans Walser

Ein Korbbogen ist eine Folge von Kreisbögen mit gemeinsamer Tangente an den Übergangspunkten [1]. Geschlossene Korbbögen können als Um-Korbbögen oder In-Korbbögen von Polygonen dienen und sind daher eine Verallgemeinerung der Begriffe Umkreis und Inkreis. Ein Polygon ungerader Eckenzahl hat genau einen Um-Korbbogen und genau einen In-Korbbogen. Ein Polygon gerader Eckenzahl hat entweder keinen oder dann unendlich viele Um-Korbbögen; dasselbe gilt für In-Korbbögen. Die Kriterien über die Existenz solcher geschlossener Korbbögen sind Verallgemeinerungen von Eigenschaften der Sehnenvierecke und Tangentenvierecke.

1 Konstruktion eines Korbbogens

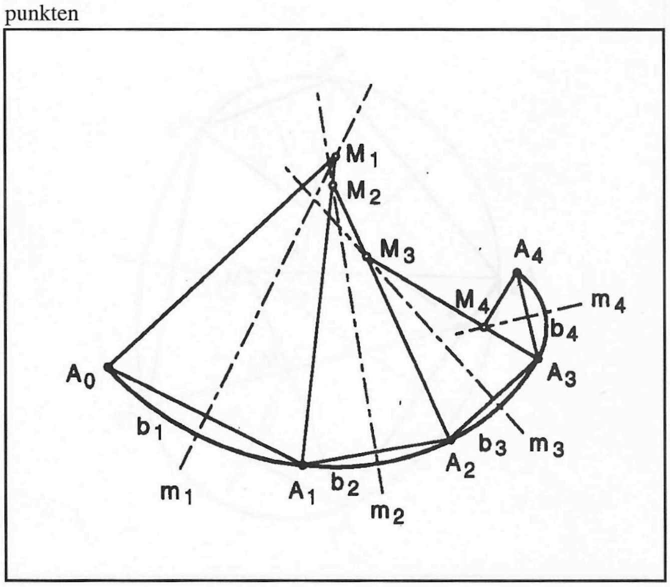
In [1] werden Korbbögen mit vorgegebenen Zentren der jeweiligen Kreisbögen besprochen. Im Anschluss daran untersuchen wir Korbbögen mit vorgegebenen Übergangspunkten A_0, A_1, A_2, ... (Fig. 1); es geht also darum, einen Korbbogen „einzupassen". Dazu wählen wir zunächst einen beliebigen Punkt M_1 auf der Mittelsenkrechten m_1 der Strecke $\overline{A_0A_1}$. Dieser Punkt M_1 sei das Zentrum des Bogens b_1 von A_0 nach A_1. Die Mittelpunkte M_j der folgenden Bögen sind dann iterativ bestimmbar: M_j ist der Schnittpunkt der Geraden $A_{j-1}M_{j-1}$ mit der Mittelsenkrechten m_j der Strecke $\overline{A_{j-1}A_j}$.

Da M_1 auf m_1 beliebig gewählt werden kann, ist der Korbbogen nicht eindeutig bestimmt. Eine Verschiebung von M_1 zu M^*_1 (Fig. 2) liefert einen zweiten Korbbogen, dessen Übergangsrichtungen in den Punkten A_j gegenüber dem ersten Korbbogen alle um denselben Winkel, aber in alternierendem Drehsinn verdreht sind.

2 Geschlossene Korbbögen

Wir untersuchen nun den Fall $A_n = A_0$; die Punkte A_j sind also die Eckpunkte eines geschlossenen Polygons mit n Ecken. Bei einem beliebigen Start-Mittelpunkt M_1 stimmt die Anfangsrichtung t_0 im allgemeinen nicht mit der Endrichtung t_n überein. Da wir für einen geschlossenen Korbbogen auch einen glatten Übergang in $A_n = A_0$ verlangen, müssen wir uns überlegen, wie wir Anfangsrichtung t_0 und Endrichtung t_n in Übereinstimmung bringen können. Da sich eine Änderung der Anfangsrichtung t_0

Fig. 1 Konstruktion eines Korbbogens mit gegebenen Übergangspunkten



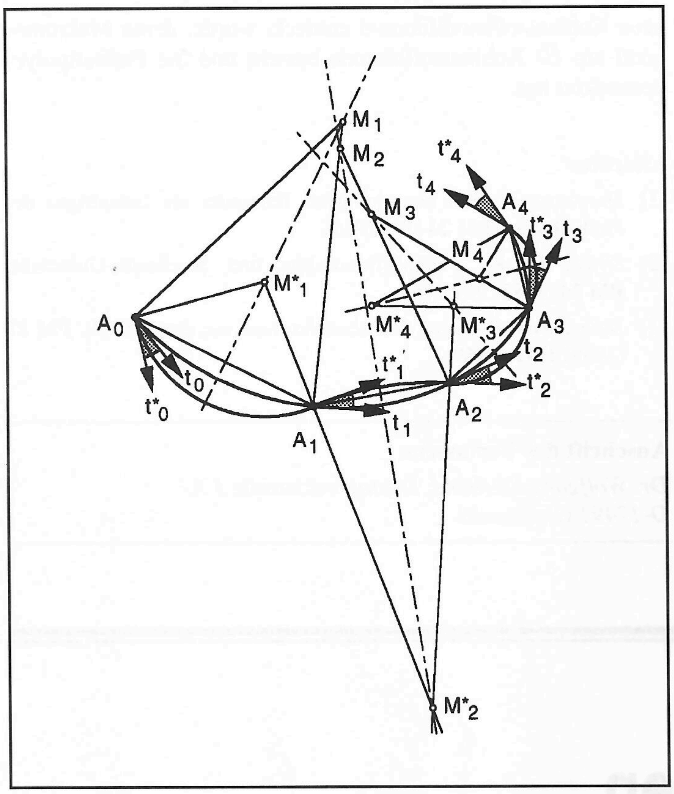


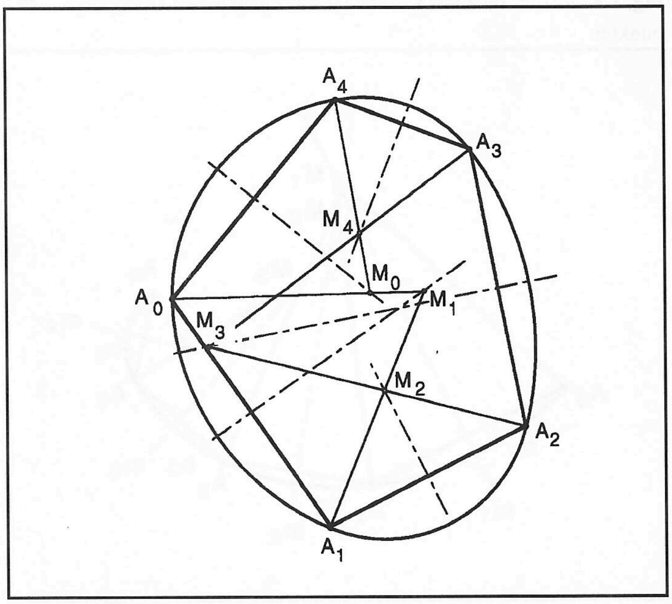
Fig. 2 Alternierende Verdrehung der Übergangsrichtungen

in alternierendem Sinn auf die weiteren Übergangsrichtungen t_j überträgt, gilt folgende Fallunterscheidung: Bei ungeradem n sind die Änderungen von t_0 und t_n gegenläufig (Fig. 3); bei geradem n sind die Richtungsänderungen gleichläufig.

3 Geschlossene Korbbögen mit ungerader Anzahl der Einzelbögen

Aus der Gegenläufigkeit der Richtungsänderungen ergibt sich die innere Winkelhalbierende einer beliebigen Startrichtung t_0 und der zugehörigen Endrichtung t_n als gemeinsame Start- und Endrichtung. Für ungerade n gibt es also einen geschlossenen Korbbogen. Im Unterricht muß hier darauf hingewiesen werden, daß damit zwar die Existenz, nicht aber die Eindeutigkeit eines

Fig. 4 Fünfeck mit Um-Korbbogen



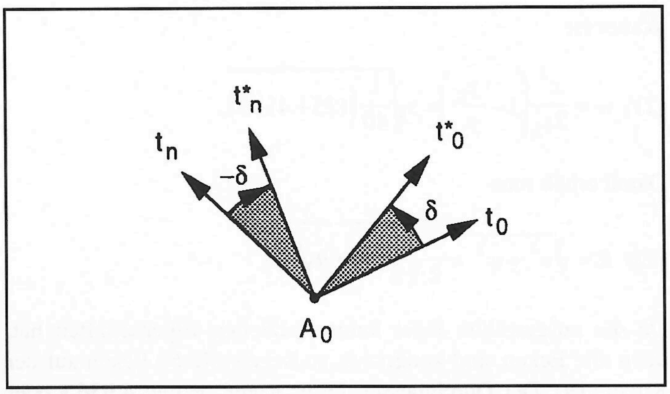


Fig. 3 Gegenläufige Richtungsänderung bei ungerader Eckenzahl

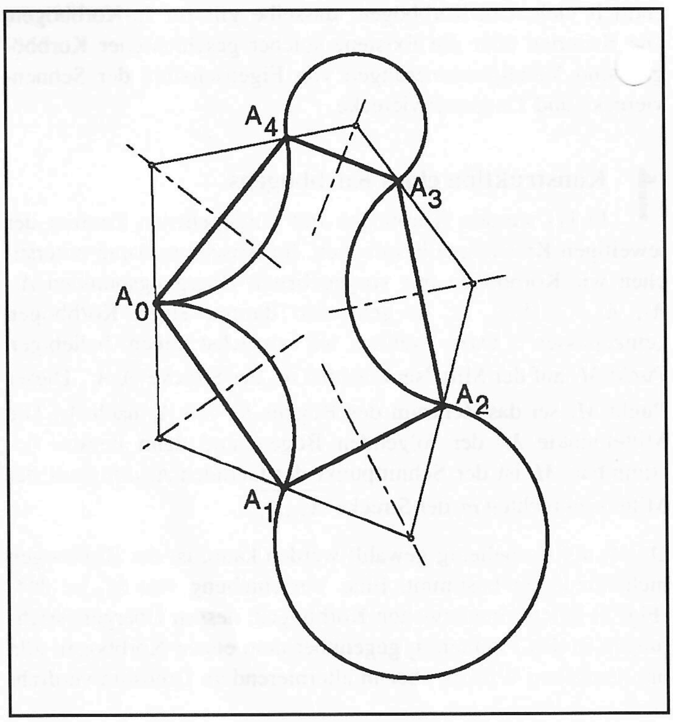
geschlossenen Korbbogens gesichert ist. Es könnte ja sein, daß eine andere Startrichtung t'_0 mit einer zugehörigen Endrichtung t'_n zu einer anderen Winkelhalbierenden führt. Dies ist aber nicht möglich, da zwischen den beiden Startrichtungen t_0 und t'_0 einerseits und den beiden Endrichtungen t_n und t'_n andererseits entgegengesetzt gleiche Winkeldifferenzen bestehen, so daß die Winkelhalbierende gemeinsam ist.

Den nun eindeutig bestimmten geschlossenen Korbbogen nennen wir in Analogie zum Umkreis einen Um-Korbbogen. Es gilt somit:

Ein Polygon ungerader Eckenzahl hat genau einen Um-Korbbogen.

Beim Dreieck ist der Um-Korbbogen der gewöhnliche Umkreis; ebenso fällt der Um-Korbbogen bei einem Sehnen-Polygon mit dem Umkreis zusammen. Die Figur 4 zeigt ein Fünfeck, das keinen Umkreis besitzt, mit dem zugehörigen Um-Korbbogen. Nehmen wir im Fünfeck der Figur 4 die äußere Winkelhalbierende einer beliebigen Startrichtung t_0 und der zugehörigen Endrichtung t_n als neue Startrichtung, ergibt sich ein Korbbogen mit einer Spitzkehre (Fig. 5).

Fig. 5 Korbbogen mit Spitzkehre



4 Geschlossene Korbbögen mit gerader Anzahl der Einzelbögen

Da Start- und Endrichtung gleichsinnig ändern, kann keine gemeinsame Start- und Endrichtung durch Drehen einer beliebigen Startrichtung erreicht werden; die Situation ist wie bei einem jungen Hund, der versucht, seinen eigenen Schwanz durch schnelles Umdrehen zu schnappen.

Der Winkel zwischen Startrichtung und Endrichtung ist eine von der Startrichtung unabhängige Invariante. Je nachdem, ob diese Invariante von Null verschieden ist oder nicht, hat das Polygon gerader Eckenzahl keine oder dann unendlich viele Um-Korbbögen. Wir wollen nun untersuchen, in welchem Fall es Um-Korbbögen gibt.

Dazu führen wir im Polygon gerader Eckenzahl mit einem Um-Korbbogen Winkelbezeichnungen gemäß Figur 6 ein.

Das Kriterium für die Geschlossenheit des Korbbogens, also für die Existenz eines Um-Korbbogens, ist $\varepsilon_n = \varepsilon_0$. Wegen $\alpha_j = \varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}$ und $\alpha_n = \alpha_0$, also explizit

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$
$$\alpha_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4,\ \alpha_4 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_0, \qquad \alpha_0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1,$$

folgt

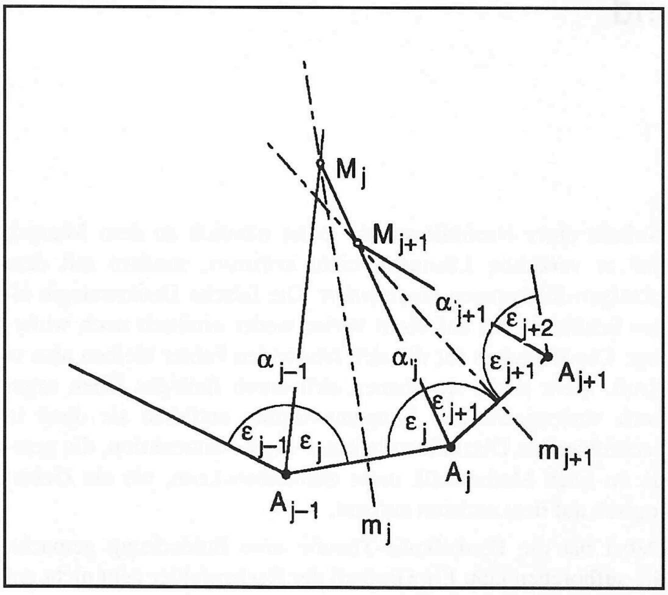
$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2},$$

oder

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \pm \ldots - \alpha_{n-1} = 0.$$

Dies ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Um-Korbbogens und damit unendlich vieler Um-Korbbögen. Wenn umgekehrt diese Bedingung erfüllt ist, kann ein beliebiges ε_1 und damit ein Start-Mittelpunkt M_1 auf m_1 gewählt werden. Anschließend sind ε_2, ε_3, ... und damit M_2, M_3, ... bestimmbar, so daß schließlich $\varepsilon_n = \varepsilon_0$, was einen geschlossenen Korbbogen garantiert. Somit gilt:

Fig. 6 Winkelbezeichnungen



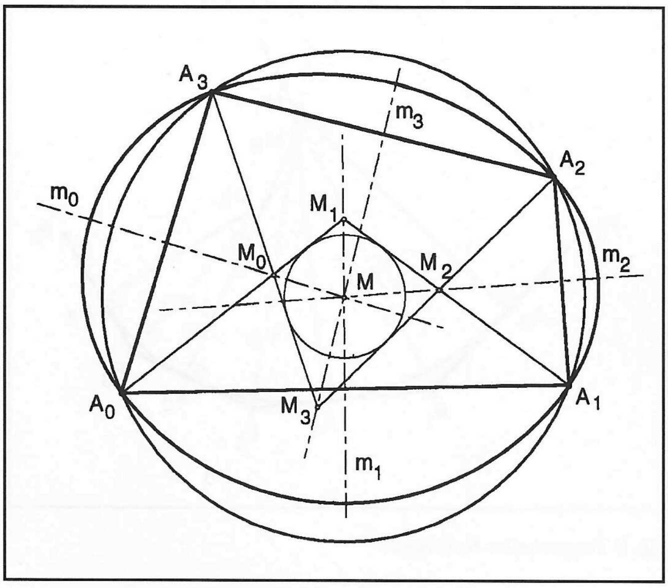


Fig. 7 Sehnenviereck mit Um-Korbbogen

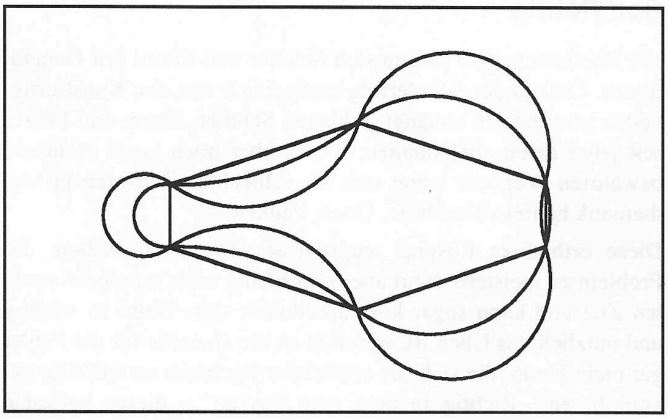
> Ein Polygon gerader Eckenzahl hat genau dann einen - und damit unendlich viele - Um-Korbbögen, wenn die alternierende Winkelsumme verschwindet.

Ein Viereck mit verschwindender alternierender Winkelsumme ist ein Sehnenviereck; einer der unendlich vielen Um-Korbbögen ist der Umkreis. Die Figur 7 zeigt ein Sehnenviereck mit einem vom Umkreis verschiedenen Um-Korbbogen. Aus der Figur 7 ist auch ersichtlich, daß die Mittelsenkrechten m_j im Sehnenviereck $A_0A_1A_2A_3$ gleichzeitig die Winkelhalbierenden im Viereck $M_0M_1M_2M_3$ sind. Der Umkreismittelpunkt M des Sehnenvierecks $A_0A_1A_2A_3$ ist also auch Inkreismittelpunkt des Viereckes $M_0M_1M_2M_3$, das somit ein Tangenentenviereck ist. In einem Polygon gerader Eckenzahl größer als vier ist die Bedingung einer verschwindenden alternierenden Winkelsumme zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines Umkreises. Daher gibt es solche Polygone mit zwar unendlich vielen Um-Korbbögen, aber ohne Umkreis. Die Figur 8 zeigt ein Beispiel.

5 Tangentielle Korbbögen

Nachdem die Um-Korbbögen als Verallgemeinerung des Umkreis-Begriffes gefunden wurden, fragen wir nach einer analogen Verallgemeinerung des Inkreis-Begriffes. Als Vorbereitung behandeln wir tangentielle Korbbögen: Zu einem gegebe-

Fig. 8 Sechseck ohne Umkreis mit Um-Korbbögen



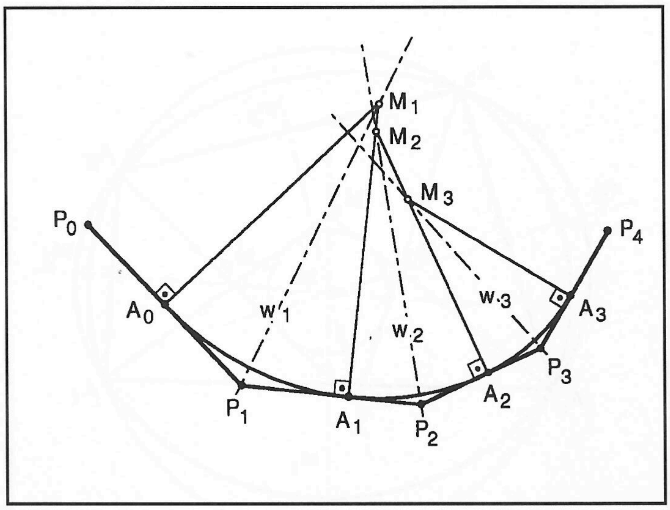


Fig. 9 Tangentieller Korbbogen

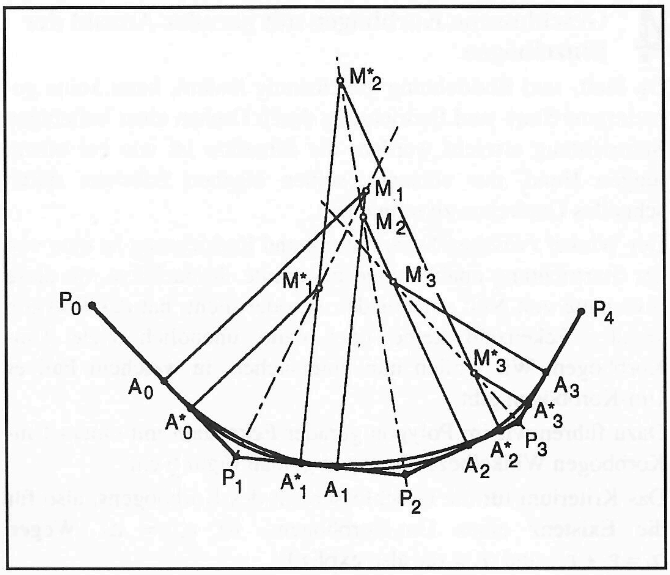


Fig. 10 Veränderung der Tangentenabschnitte

nen Polygonzug $P_0P_1P_2$... suchen wir einen Korbbogen mit Übergangspunkten A_0, A_1, A_2, ... so, daß die Polygonstrecke $\overline{P_jP_{j+1}}$ Tangente an den Korbbogen im Übergangspunkt A_j ist (Fig. 9).

Die Konstruktion beginnt mit einem beliebigen Punkt M_1 auf der Winkelhalbierenden w_1 des Winkels $P_0P_1P_2$. Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt des ersten Kreisbogens. Die Punkte A_0 und A_1 ergeben sich als Fußpunkte der Lote von M_1 auf P_0P_1 beziehungsweise P_1P_2. Den Punkt M_2 finden wir dann als Schnittpunkt von M_1A_1 mit der Winkelhalbierenden w_2 des Winkels $P_1P_2P_3$, und so weiter.

Eine Verschiebung des Punktes M_1 auf der Winkelhalbierenden w_1 führt zu einer Veränderung des Tangentenabschnittes $\overline{A_0P_1}$ und zu einer betragsmäßig gleich großen, aber mit einem alternierenden Vorzeichen versehenen Veränderung der Tangentenabschnitte $\overline{A_jP_{j+1}}$ (Fig. 10). Für geschlossene tangentielle Korbbögen (In-Korbbogen) kann nun analog zu den Um-Korbbögen bewiesen werden:

Ein Polygon mit ungerader Eckenzahl hat genau einen In-Korbbogen. Ein Polygon mit gerader Eckenzahl hat entweder keinen oder dann unendlich viele In-Korbbögen; letzteres ist genau dann der Fall, wenn die alternierende Seitensumme des Polygons verschwindet.

Literatur

[1] *O. Giering*: Zur Geometrie der Polygon-Korbbögen. **PM 34** (1992) 245-248.

Anschrift des Verfassers:
Dr. Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Falsche subjektive Lösungsstrategien und ihre didaktische Fehlinterpretation

Arithmasthenie/Dyskalkulie (Rechenschwäche)

Rolf Röhrig

Mit Rechenmängeln plagen sich Schüler und Eltern seit Generationen. Und da der Schulerfolg maßgeblich von den Kunstfertigkeiten im Rechnen abhängt, schlagen Schüler, Eltern und Lehrer seit jeher einen altbekannten, darum aber noch lange nicht altbewährten Weg ein, wenn sich die schlechten Zensuren in Mathematik häufen: Nachhilfe, Üben, Pauken.

Diese orthodoxe Lösung zeugt zwar vom guten Willen, das Problem zu meistern, führt aber sehr häufig nicht zum gewünschten Ziel und kann sogar kontraproduktiv sein. Denn so wichtig und nützlich das Üben ist, es reicht an die *Ursache* für die Fehler gar nicht heran, die sich bei schlechten Rechnern so auffällig akkumulieren. „Richtig rechnet man das so" - dieser bekannte Auftakt einer Nachhilfestunde leidet nämlich an dem Mangel, daß er verkehrte Lösungen nicht *kritisiert,* sondern mit dem richtigen Rechenweg *konfrontiert*. Die falsche Denkstrategie eines Schülers wird auf diese Weise weder ermittelt noch widerlegt. Die Ursachen für die sich häufenden Fehler bleiben also in Kraft. Mehr noch, sie können sich durch fleißiges Üben sogar noch verfestigen. Ihre Langzeitwirkung entfalten sie dann in nachfolgenden Disziplinen in einer Art Kettenreaktion, die gerade im Fach Mathematik nicht ausbleiben kann, wo ein Gebiet logisch auf dem anderen aufbaut.

Dabei hat die Dyskalkulie-Theorie eine Entdeckung gemacht, die aufhorchen läßt: Ein Großteil der Rechenfehler geht nicht auf