

Hans Walser, [20180720]

Zwölfeck und Rechteck

1 Worum geht es?

Ein Problem zur Zerlegungsgleichheit.

Weitere Beispiele zu dieser Thematik siehe [\[1\]](#), [\[2\]](#), [\[3\]](#).

2 Problemstellung

In ein reguläres Dreiecksraster (Abb. 1) zeichnen wir ein reguläres Zwölfeck und ein Rechteck.

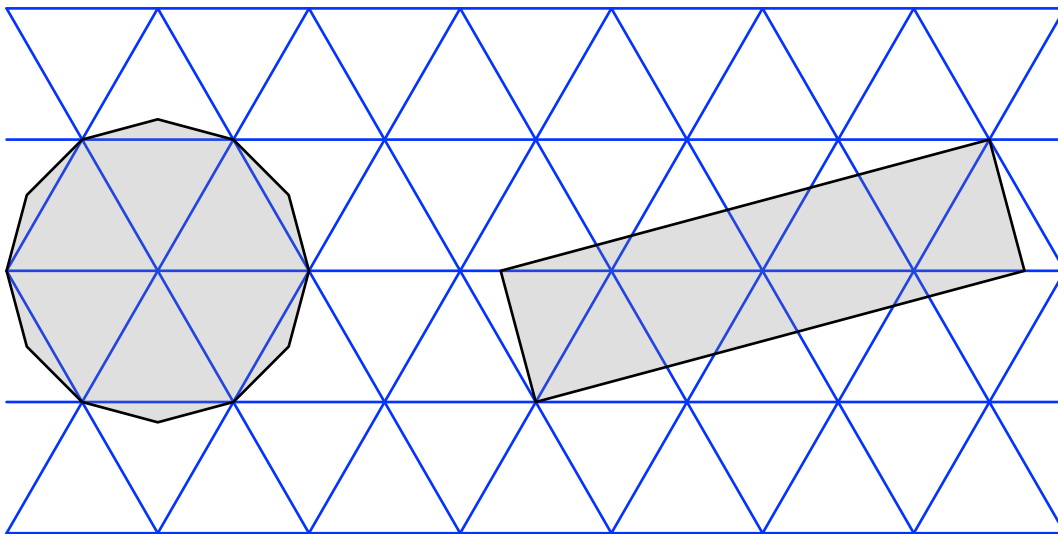


Abb. 1: Zwölfeck und Rechteck

Sind die beiden Figuren flächengleich?

3 Flächenberechnungen

Für die Flächenberechnungen setzen wir die Seitenlänge der gleichseitigen Dreiecke 1.

Das Zwölfeck besteht aus zwölf gleichschenkligen Dreiecken der Schenkellänge 1 und dem Spitzenwinkel 30° . Daraus ergibt sich der Flächeninhalt $A_{12\text{-Eck}}$:

$$A_{12\text{-Eck}} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\sin(30^\circ)}_{\frac{1}{2}} = 3 \quad (1)$$

Das Rechteck hat die Diagonalenlängen $2\sqrt{3}$ und den Diagonalschnittwinkel 30° . Daraus ergibt sich der Flächeninhalt A_{Rechteck} :

$$A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{3}) \cdot \sin(30^\circ) = 3 \quad (2)$$

Die beiden Figuren sind also flächengleich.

4 Zerlegungsgleichheit

Nach einem Satz von Hilbert sind flächengleiche Polygone in der Ebene auch zerlegungsgleich.

Die Abbildung 2 zeigt eine gemeinsame Zerlegung.

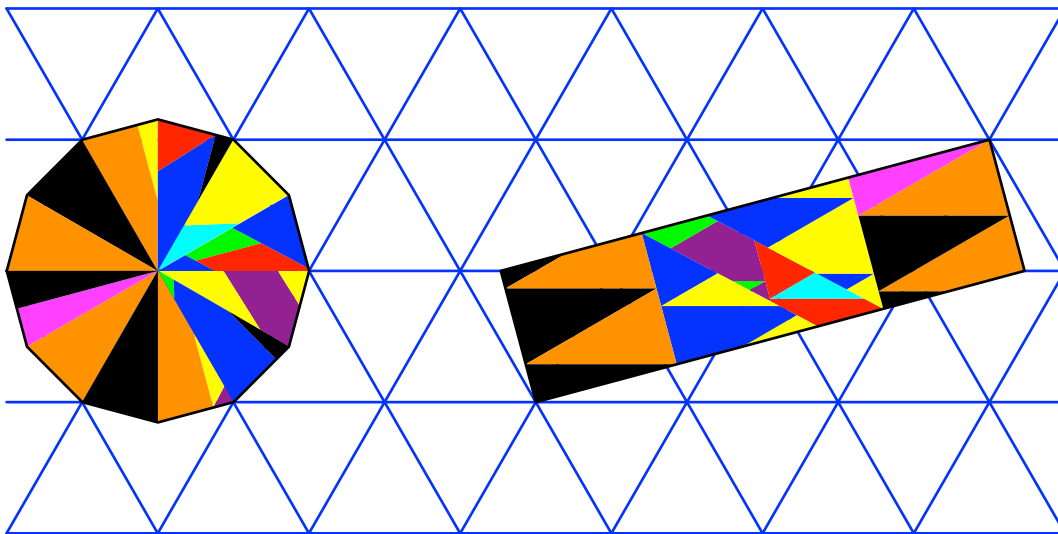


Abb. 2: Gemeinsame Zerlegung

Die Abbildung 3 zeigt ein Zwischenbild. Wir erkennen einerseits die gleichschenkligen Dreiecke des Zwölfecks und andererseits die Zerlegungsbahnen zum Rechteck.

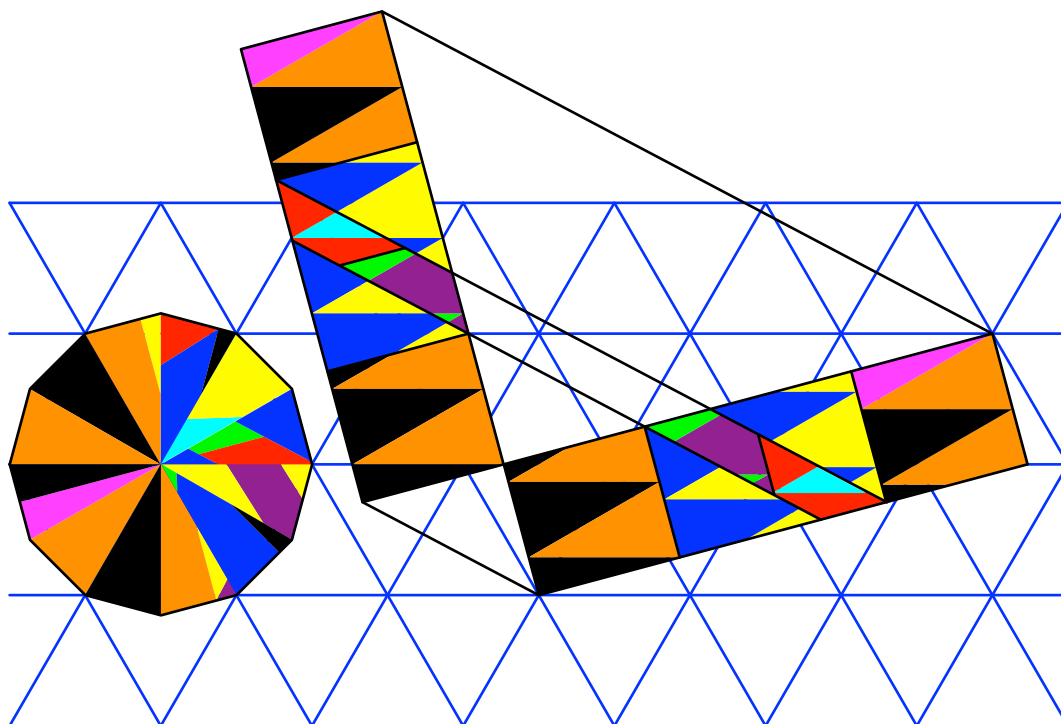


Abb. 3: Zwischenbild

Gibt es eine elegantere Lösung?

Websites

[1] Hans Walser: Zwölfeck (abgerufen 20.07.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Z/Zwoelfeck/Zwoelfeck.htm

[2] Hans Walser: Zwölfeck 2 (abgerufen 20.07.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Z/Zwoelfeck2/Zwoelfeck2.htm

[3] Hans Walser: Zwölfecksfläche (abgerufen 20.07.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Z/Zwoelfecksflaeche/Zwoelfecksflaeche.htm