Hans Walser, [20160118]

Zweiecke als Deltakurven

Idee: Renato Pandi

1 Worum geht es

Eine Delta-Kurve ist eine geschlossene Kurve, die sich beliebig in einem gleichseitigen Dreieck („Delta") verdrehen lässt. Dabei sollen immer alle drei Dreieckseiten von der Kurve berührt werden.

Bogen-Zweiecke mit Winkeln von 60° oder 120° sind solche Deltakurven.

Es wird gezeigt, dass es unter den Delta-Kurven keine anderen konvexe Bogen-Zweiecke gibt.

2 Disposition

Das Bogen-Zweieck habe den Bogenradius 1 und den Zentriwinkel 2β für jeden der beiden Bögen. Es gelten dann die in der Abbildung 1 eingetragenen Beziehungen.

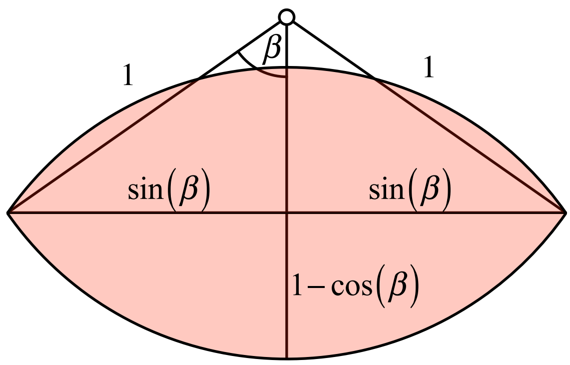

Abb. 1: Das Zweieck

An den beiden Ecken hat das Bogen-Zweieck dann die Innenwinkel 2β. (Der Innenwinkel ergibt sich durch die Tangenten an die Kreisbögen in der Ecke des Zweiecks.)

3 Fallunterscheidung

Wir unterscheiden folgende drei Fälle bezüglich des Winkels β:

1. $0 < \beta \leq \frac{\pi}{6}$ („Zahnstocher")

2. $\frac{\pi}{6} \leq \beta \leq \frac{\pi}{3}$ („mittleres Zweieck")

3. $\frac{\pi}{3} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ („dicke Zweiecke")

Die Fallunterscheidungen sind nicht disjunkt, sondern haben gemeinsame Grenzen.

In jedem der drei Fälle zeichnen wir das Bogen-Zweieck im Querformat und im Hochformat und umschreiben ein gleichseitiges Dreieck. Falls das zur Diskussion stehende Bogen-Zweieck eine Delta-Kurve ist, müssen die beiden umbeschriebenen Dreiecke dieselbe Höhe haben. Damit haben wir eine notwendige Bedingung für die zulässigen Winkel β.

3.1 Zahnstocher

Es ist also $0 < \beta \leq \frac{\pi}{6}$. Die Abbildung 2 zeigt das Beispiel für $\beta = \frac{\pi}{12} \mathrel{\hat{=}} 15°$.

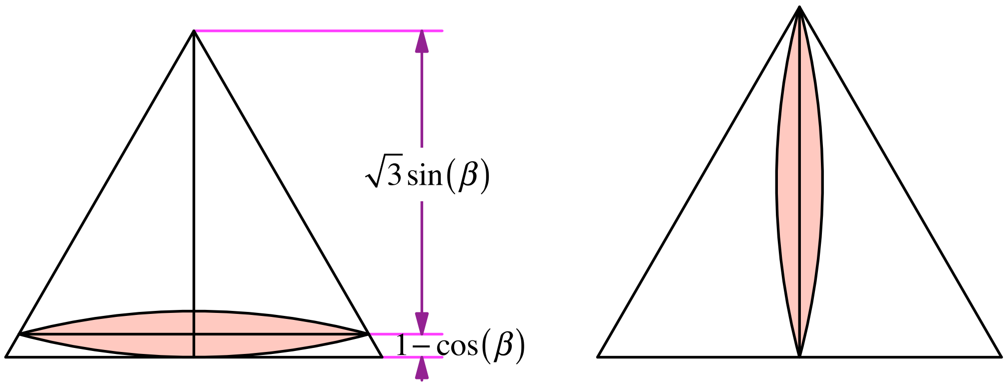

Abb. 2: Zahnstocher. *beta* = 15°

Für den Zahnstocher im Querformat erhalten wir die Dreieckshöhe:

$$h_{\text{quer}} = 1 - \cos(\beta) + \sqrt{3}\sin\beta \tag{1}$$

Für den Zahnstocher im Hochformat erhalten wir die Dreieckhöhe:

$$h_{\text{hoch}} = 2\sin(\beta) \tag{2}$$

Die Bedingung $h_{\text{hoch}} \overset{!}{=} h_{\text{quer}}$ liefert die Gleichung:

$$2\sin(\beta) = 1 - \cos(\beta) + \sqrt{3}\sin\beta \tag{3}$$

Die Gleichung (3) hat im Intervall $0 < \beta \leq \frac{\pi}{6}$ die Lösung:

$$\beta = \frac{\pi}{6} \tag{4}$$

Das ist die Rand-Lösung.

3.2 Mittleres Zweieck

Es ist: $\frac{\pi}{6} \leq \beta \leq \frac{\pi}{3}$. Die Abbildung 3 zeigt das Beispiel für $\beta = \frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$.

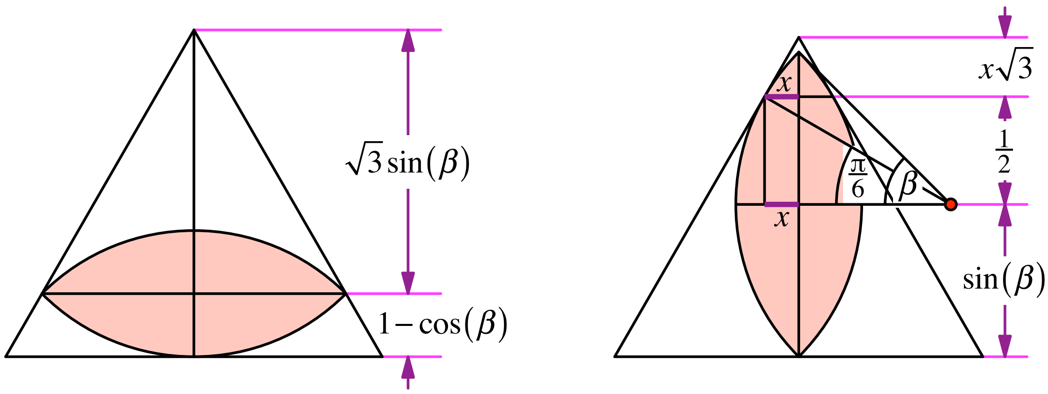

Abb. 3: *beta* = 45°

Beim Bogen-Zweieck im Querformat ergibt sich die Dreieckshöhe wie bei (1):

$$h_{\text{quer}} = 1 - \cos(\beta) + \sqrt{3}\sin\beta \tag{5}$$

Für das Hochformat berechnen wir zunächst die Hilfsgröße x:

$$x = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \cos(\beta) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos(\beta) \tag{6}$$

Damit erhalten wir die Dreieckshöhe:

$$h_{\text{hoch}} = \sin(\beta) + \tfrac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos(\beta)\right) = \sin(\beta) + 2 - \sqrt{3}\cos(\beta) \tag{7}$$

Gleichsetzen der beiden Höhen liefert:

$$\sin(\beta) + 2 - \sqrt{3}\cos(\beta) = 1 - \cos(\beta) + \sqrt{3}\sin\beta \tag{8}$$

Die Gleichung (8) hat im Intervall $\frac{\pi}{6} \leq \beta \leq \frac{\pi}{3}$ die beiden Lösungen:

$$\beta_1 = \tfrac{\pi}{6} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \tfrac{\pi}{3} \tag{9}$$

Das sind die beiden Rand-Lösungen.

3.3 Dickes Zweieck

Es ist $\frac{\pi}{3} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Die Abbildung 4 zeigt das Beispiel für $\beta = \frac{5}{12}\pi \mathrel{\hat{=}} 75°$.

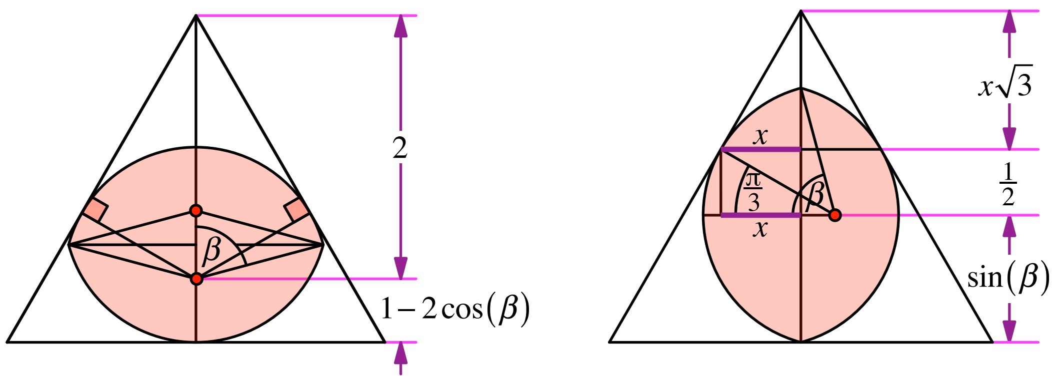

Abb. 4: Dickes Zweieck. *beta* = 75°

Beim Querformat erhalten wir die Dreieckshöhe:

$$h_{\text{quer}} = 1 - 2\cos(\beta) + 2 = 3 - 2\cos(\beta) \tag{10}$$

Für das Hochformat benötigen wir wiederum die Hilfsgröße (6) und erhalten die Dreieckshöhe wie bei (7):

$$h_{\text{hoch}} = \sin(\beta) + \tfrac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos(\beta)\right) = \sin(\beta) + 2 - \sqrt{3}\cos(\beta) \tag{11}$$

Gleichsetzen liefert:

$$\sin(\beta) + 2 - \sqrt{3}\cos(\beta) = 3 - 2\cos(\beta) \tag{12}$$

Die Gleichung (12) hat im Intervall $\frac{\pi}{3} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ die beiden Rand-Lösungen:

$$\beta_1 = \tfrac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \tfrac{\pi}{2} \tag{13}$$

Somit haben wir als einzige Lösungen die Bogen-Zweiecke mit Innenwinkeln von 60°, 120° und 180°. Letzteres ist der Inkreis des Dreiecks.