Hans Walser, [20180916]

Zwei Folgen von Dreiecken

Idee und Anregung: Eigenmann 1982, S. 8, Aufg. 38

1 Die Aufgabe

Einem beliebigen Dreieck (in Abb. 1 blau, links) werden flächengleiche Dreiecke angefügt.

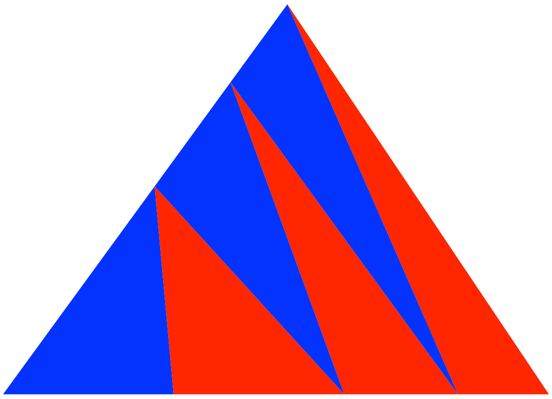

Abb. 1: Anfügen flächengleicher Dreiecke

Wie geht es weiter?

Nach einer geeigneten Standardisierung erscheinen die Binomialkoeffizienten. Im Grenzfall erhalten wir eine Rektifizierung des Kreisumfanges, in realen Beispielen also eine Approximation des Kreisumfanges.

2 Standardisierung und Bezeichnungen

Da Längen- und Flächenverhältnisse affin invariant sind, beschränken wir uns auf eine standardisierte Darstellung (Abb. 2).

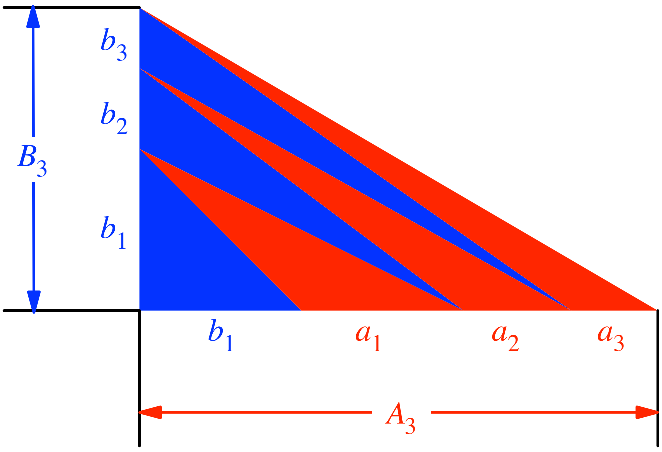

Abb. 2: Standardisierte Darstellung

Das Startdreieck ist rechtwinklig gleichschenklig mit der Kathetenlänge 1. Mit den Bezeichnungen der Abbildung 2 ist also:

$$b_1 = 1 \tag{1}$$

Weiter definieren wir:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{und} \quad A_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2}$$

Da jedes Teildreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ hat, ist:

$$a_n = \frac{1}{B_n} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{A_{n-1}} \tag{3}$$

3 Rekursion

Mit (1) bis (3) erhalten wir einen rekursiven Formelsatz wie folgt.
Startwerte:

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 0, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = 0 \tag{4}$$

Rekursion für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{1}{A_{n-1}} \\ B_n &= B_{n-1} + b_n \\ a_n &= \tfrac{1}{B_n} \\ A_n &= A_{n-1} + a_n \end{aligned} \tag{5}$$

Die Tabelle 1 gibt die ersten sechs Werte. Der Autor entschuldigt sich für die nicht elegante Darstellung der Brüche.

n	a_n	A_n	b_n	B_n
1	1	2	1	1
2	2/3	8/3	1/2	3/2
3	8/15	16/5	3/8	15/8
4	16/35	128/35	5/16	35/16
5	128/315	256/63	35/128	315/128
6	256/693	1024/231	63/256	693/256

Tab. 1: Erste Werte

4 Explizite Formeln

Wir sehen Zusammenhänge in der Tabelle 1. Es ist zunächst:

$$A_n = 2na_n \tag{6}$$

$$b_n = \tfrac{1}{(2n-1)a_n} \tag{7}$$

$$B_n = \frac{1}{a_n} \tag{8}$$

Die Formel (8) folgt aus (3).

Wir können also alle Folgenglieder durch a_n ausdrücken.
Dafür finden wir nach einigem Knobeln die explizite Formel:

$$a_n = \frac{4^{n-1}}{n\binom{2n-1}{n-1}} \tag{9}$$

Hier erscheinen die Binomialkoeffizienten.
Die Formeln (6), (7) und (9) sind lediglich Vermutungen.
Sie wurden verifiziert für $n = 1, \ldots, 1000$.
Wer Lust hat, kann sich mit einem Induktionsbeweis versuchen.

5 Formkonvergenz

Die Summen A_n und B_n sind die Kathetenlängen der Gesamtfigur nach n Doppelschritten (vgl. Abb. 2 für $n = 3$). Die Frage ist, welche Form die Gesamtfigur für $n \to \infty$ annimmt.
Für das Kathetenverhältnis erhalten wir aus (6) und (8):

$$\frac{A_n}{B_n} = 2\frac{4^{2n-2}}{n\binom{2n-1}{n-1}^2} \tag{10}$$

Die Tabelle 2 zeigt einige Werte:

n	Kathetenverhältnis
1	2
10	1.610544498
100	1.574728214
1000	1.571189075
10000	1.570835597
100000	1.570800254

Tab. 2: Kathetenverhältnis

Ein Vergleich mit $\frac{\pi}{2} \approx 1.570796327$ führt zur Vermutung:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{A_n}{B_n} \right) = \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

Diese Vermutung ist richtig. Beweis mit CAS. Unsere Dreiecke geben also eine Approximation für den Kreisumfang (Abb. 3).

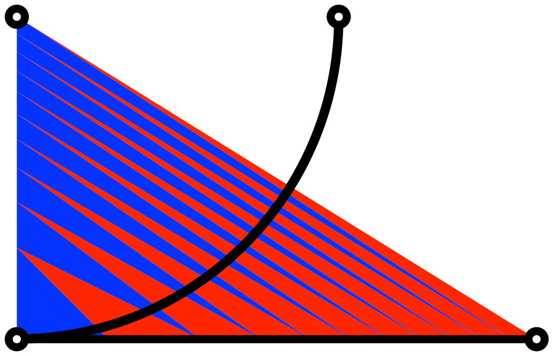

Abb. 3: Die Bogenlänge wird durch die lange Kathete approximiert

Literatur

Eigenmann, Paul (1982): Geometrische Denkaufgaben. Zug: Klett und Balmer. 1982. ISBN 3-264-72231-3.