

Hans Walser, [20160806]

Zentralperspektive

1 Worum geht es?

Wir bearbeiten einen Aspekt der Zentralperspektive am klassischen Beispiel des Eisenbahngleises.



Abb. 1: Oberwinterthur

Bei der Zentralperspektive wird oft fälschlicherweise behauptet, dass die scheinbare Verkürzung der Länge der Bahnschwellen nach einer geometrischen Folge geschehe (Schmidt, 1984, S. 22). Die tatsächliche scheinbare Verkürzung geht mit einer gebrochen rationalen Funktion, im einfachsten Fall mit einer harmonischen Folge.

2 Beispiel

Die Abbildung 2 zeigt links (blau) ein korrektes, rechts (rot) ein falsches Bild.

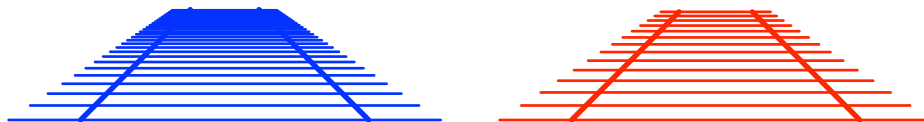


Abb. 2: Korrektes und falsches Gleisbild

3 Didaktisch aufgearbeitetes Beispiel

Das folgende Beispiel ist so bearbeitet, dass „schöne“ Zahlen herauskommen.

3.1 Das Beispiel

Die Abbildung 3 zeigt links (blau) eine richtige und rechts (rot) eine falsche Darstellung. Die Bilder der Schienen sind bis zum Fluchtpunkt geführt worden.

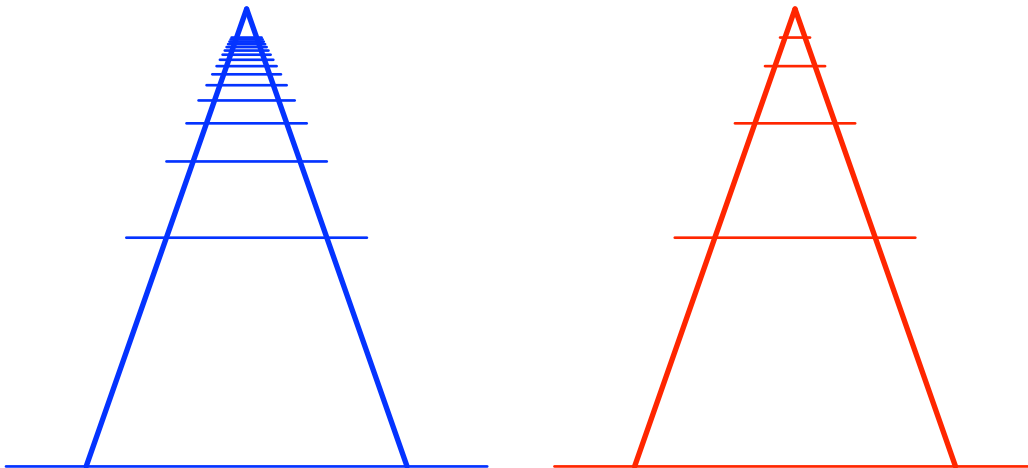


Abb. 3: Richtige und falsche Darstellung

3.2 Schwellenlängen

Wir setzen die vorderste Schwellenlänge auf 1 (Abb. 4).

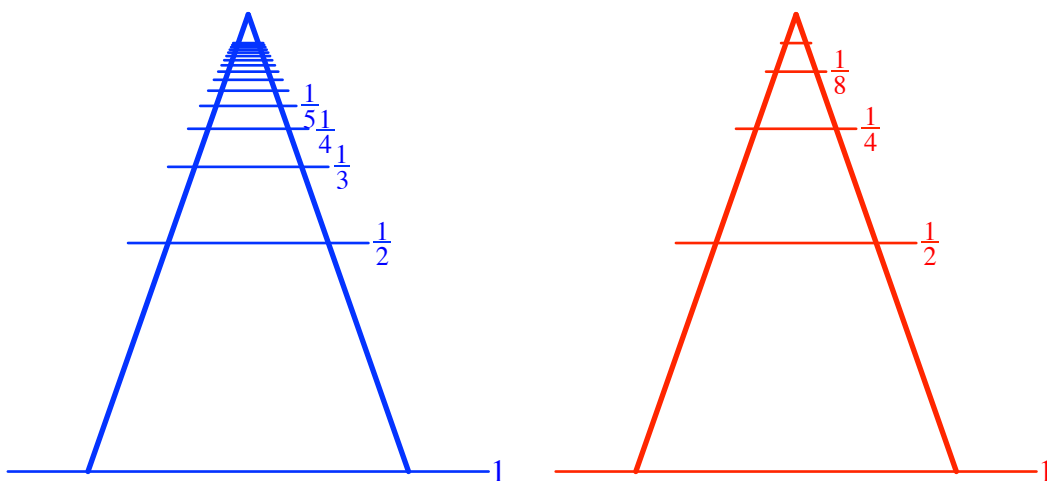


Abb. 4: Schwellenlängen

Im richtigen Fall (blau) erhalten wir damit für die scheinbaren Schwellenlängen:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots \quad (1)$$

Das ist die sogenannte *harmonische* Folge.

Im falschen Fall (rot) erhalten wir die scheinbaren Schwellenlängen:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad (2)$$

Dies ist die *geometrische* Folge mit $q = \frac{1}{2}$.

3.3 Schwellennummerierung

Wir nummerieren die Schwellen im richtigen Fall beginnend vorne mit 1 (Abb. 5).

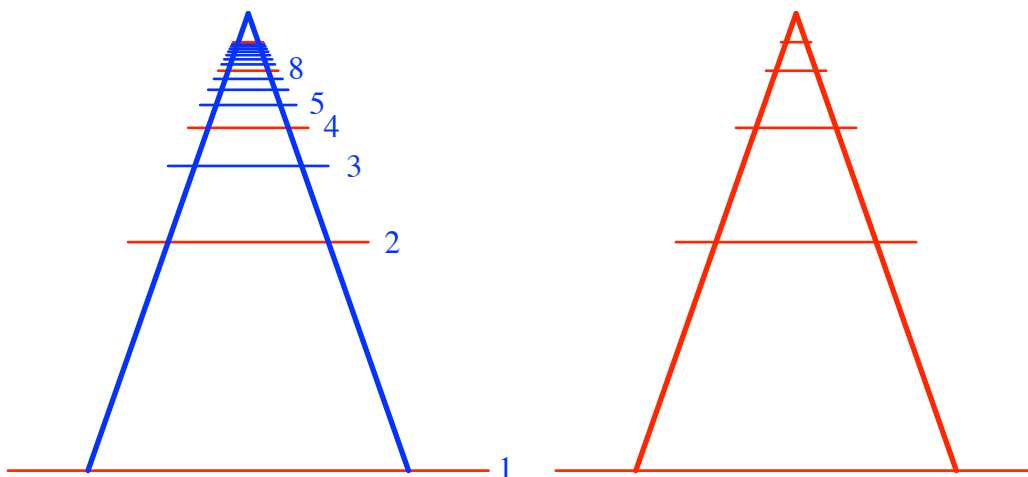


Abb. 5: Schwellennummerierung

Eine Überlagerung von blau mit rot zeigt, dass im falschen Fall nur noch die Schwellen mit den Nummern 1, 2, 4, 8, 16, ... vorkommen. Das sind die Zweierpotenzen. Erneut haben wir es mit einer geometrischen Folge zu tun.

3.4 Der Diagonalentest

Die oben besprochenen scheinbaren Schwellenlängen und Schwellennummern beweisen natürlich noch gar nicht, welche Darstellung nun den die richtige sei.

Da hilft der Diagonalentest weiter.

Wir zeichnen Diagonalen ein gemäß Abbildung 6.

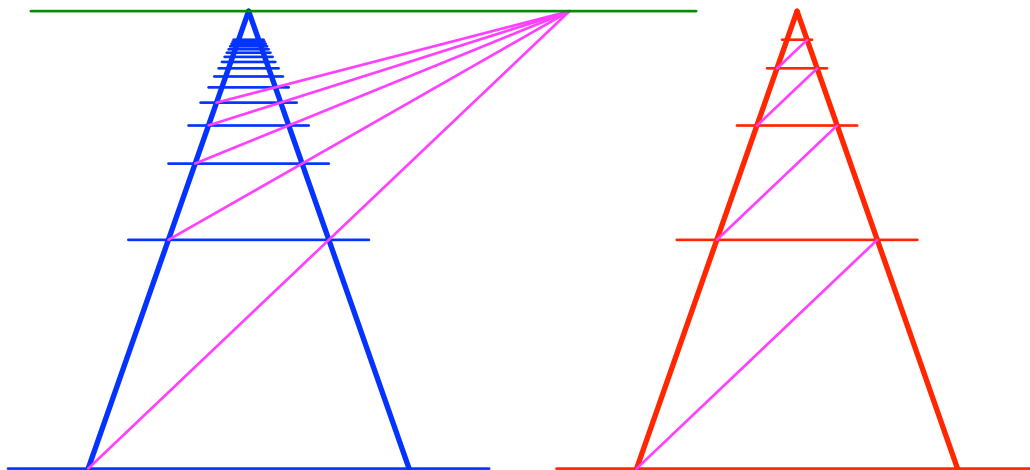


Abb. 6: Diagonalen

Diese Diagonalen sind in Wirklichkeit parallel (wir setzen gleich Schwellenabstände voraus). Parallele Geraden haben aber in der Zentralperspektive einen Fluchtpunkt. Im richtigen Fall sehen wir, dass dieser Fluchtpunkt existiert und auf der Horizontlinie des Fluchtpunktes der Schienen liegt.

In der falschen Darstellung erscheinen diese Diagonalenbilder parallel. Es kann sich daher nicht um eine Zentralperspektive handeln.

3.5 Entzerrung

Die Abbildung 7 zeigt die „Wirklichkeit“.

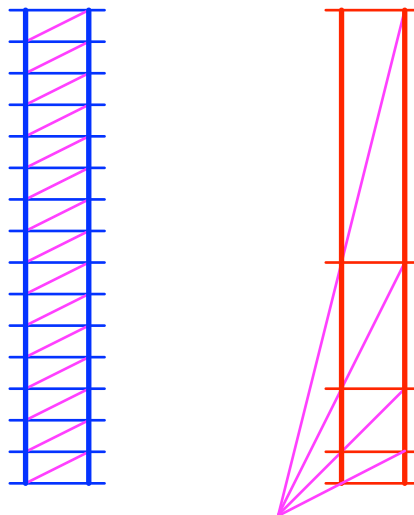


Abb. 7: Entzerrte Situation

Im richtigen Fall links sind die Schwellenabstände alle gleich und die Diagonalen parallel. Im falschen Fall wachsen die Schwellenabstände (ebenfalls mit einer geometrischen Progression) und die Diagonalen sind nicht parallel. Dafür haben sie einen sogenannten *Verschwindungspunkt*.

4 Warum der Fehler?

Woher kommt die falsche Verwendung einer geometrischen Folge im Zusammenhang mit der Zentralperspektive?

Eine mögliche Erklärung besteht in folgendem:

Die geometrische Folge wird in der Schule behandelt. Man lernt auch, dass für einen Quotienten q betragsmäßig kleiner als 1 die geometrische Reihe konvergiert. Das führt zu einer in unserem Kontext leider falschen Grundvorstellung von sichtbarem oder erreichbarem „Fluchtpunkt“.

Demgegenüber wird die harmonische Folge in der Schule kaum behandelt. Falls doch, wird dann auch gleich gezeigt (oder angedeutet) dass die harmonische Reihe divergiert. Diese Divergenz scheint der Existenz eines sichtbaren Fluchtpunktes zu widersprechen.

Der Fehler besteht darin, dass quer und längs verwechselt werden. Für die Länge bis zum Fluchtpunkt sind nicht die scheinbaren Schwellenlängen relevant, sondern die scheinbaren Abstände zwischen den Schwellen.

Die Abbildung 8 illustriert den Sachverhalt.

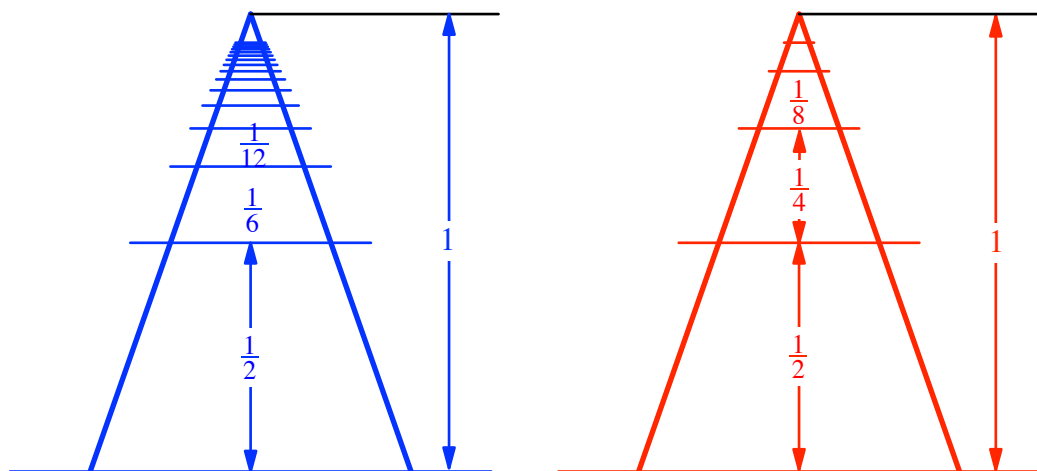


Abb. 8: Abstände zwischen den Schwellen

Wir setzen die Länge zwischen dem Bild der vordersten Schwelle und dem Fluchtpunkt auf 1.

Im korrekten Beispiel erhalten wir dann für die scheinbaren Abstände zwischen den Schwellen die Folge:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots \quad (3)$$

Dies ist nicht mehr die harmonische Folge, sondern die Differenzenfolge der harmonischen Folge.

Im falschen Beispiel erhalten wir für die scheinbaren Abstände zwischen den Schwellen die Folge:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad (4)$$

Dies ist nach wie vor eine geometrische Folge, bis auf den Startwert sogar dieselbe Folge wie (2).

Die zu den Folgen (3) und (4) gehörenden Reihen sind beide konvergent und haben (trivialerweise, wir haben den Abstand zum Fluchtpunkt ja so normiert) den Wert 1.

Natürlich können wir diese Reihen auch direkt berechnen.

Für die Folge (3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned} \quad (5)$$

Somit ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \quad (6)$$

Für die Folge (4) ergibt sich der Grenzwert aus der üblichen Formel für geometrische Reihen.

Literatur

Rüsing, Michael (2016): Mathematik und Zentralperspektive. MNU Journal, Ausgabe 4.2016, 254-256.

Schmidt, Werner (1984): Mathematikaufgaben. Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt. Stuttgart: Klett. ISBN 3-12-711100-2.

Websites

Walser: Falsche Perspektive (06.08.2016):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Falsche_Perspektive/Falsche_Perspektive.htm

Walser: Falsche Perspektive (06.08.2016):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Falsche_Perspektive2/Falsche_Perspektive2.htm