Hans Walser, [20161225]

Zahlenklassifizierung

1 Worum geht es?

Es wird eine empirisch begründete Methode vorgestellt, um aus den natürlichen Zahlen die Zweierpotenzen und die Primzahlen herauszusieben. Es zeigt sich:

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{2}\left((x+1)^n-(x-1)^n\right)\right) \bmod n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad n=2^k \\ \left(\tfrac{1}{2}\left((x+1)^n-(x-1)^n\right)\right) \bmod n = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad n \text{ prim} \end{aligned} \tag{1}$$

Beweis fehlt.

2 Die Grundformel

Wir berechnen:

$$p_n = \tfrac{1}{2}\left((x+1)^n-(x-1)^n\right) \tag{2}$$

Es ist für $n = 1, \ldots, 16$:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 1 \\
p_2 &= 2x \\
p_3 &= 3x^2 + 1 \\
p_4 &= 4x^3 + 4x \\
p_5 &= 5x^4 + 10x^2 + 1 \\
p_6 &= 6x^5 + 20x^3 + 6x \\
p_7 &= 7x^6 + 35x^4 + 21x^2 + 1 \\
p_8 &= 8x^7 + 56x^5 + 56x^3 + 8x \\
p_9 &= 9x^8 + 84x^6 + 126x^4 + 36x^2 + 1 \\
p_{10} &= 10x^9 + 120x^7 + 252x^5 + 120x^3 + 10x \\
p_{11} &= 11x^{10} + 165x^8 + 462x^6 + 330x^4 + 55x^2 + 1 \\
p_{12} &= 12x^{11} + 220x^9 + 792x^7 + 792x^5 + 220x^3 + 12x \\
p_{13} &= 13x^{12} + 286x^{10} + 1287x^8 + 1716x^6 + 715x^4 + 78x^2 + 1 \\
p_{14} &= 14x^{13} + 364x^{11} + 2002x^9 + 3432x^7 + 2002x^5 + 364x^3 + 14x \\
p_{15} &= 15x^{14} + 455x^{12} + 3003x^{10} + 6435x^8 + 5005x^6 + 1365x^4 + 105x^2 + 1 \\
p_{16} &= 16x^{15} + 560x^{13} + 4368x^{11} + 11440x^9 + 11440x^7 + 4368x^5 + 560x^3 + 16x
\end{aligned}
\tag{3}
$$

p_n ist ein Polynom vom Grad $n - 1$. Für gerades n ist p_n ein ungerades Polynom und umgekehrt.

Die Abbildung 1 zeigt die zugehörigen Polynomgrafen für $n = 1, \ldots, 8$. Für gerades n blau, für ungerades n rot.

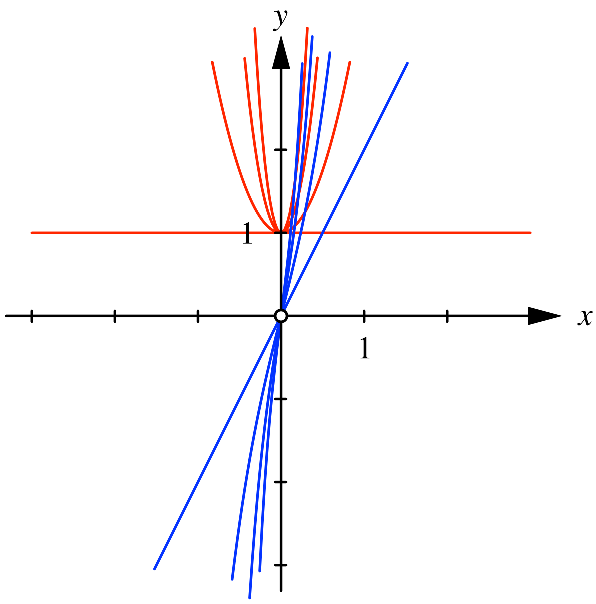

Abb. 1: Polynomgrafen

Aus (3) lesen wir ab:

- Genau wenn n eine Zweierpotenz ist, ist p_n durch n ohne Rest teilbar.
- Genau wenn n eine Primzahl ist, haben wir bei Division von p_n durch n den Rest 1.

Experimentell verifiziert für $n = 1, \ldots, 4096$. Beweis fehlt.
Um dies zu illustrieren, berechnen wir:

$$q_n = p_n \bmod n = \left(\tfrac{1}{2}\left((x+1)^n - (x-1)^n\right)\right) \bmod n \tag{4}$$

Es ist für $n = 1, \ldots, 32$:

$$\begin{array}{ll}
q_1 = 0 & q_{17} = 1 \\
q_2 = 0 & q_{18} = 6x^{15} + 2x^9 + 6x^3 \\
q_3 = 1 & q_{19} = 1 \\
q_4 = 0 & q_{20} = 4x^{15} + 4x^5 \\
q_5 = 1 & q_{21} = 7x^{18} + 3x^{14} + 14x^{12} + 1 \\
q_6 = 2x^3 & q_{22} = 2x^{11} \\
q_7 = 1 & q_{23} = 1 \\
q_8 = 0 & q_{24} = 8x^{21} + 8x^{15} + 8x^9 + 8x^3 \\
q_9 = 3x^6 + 1 & q_{25} = 5x^{20} + 10x^{10} + 1 \\
q_{10} = 2x^5 & q_{26} = 2x^{13} \\
q_{11} = 1 & q_{27} = 9x^{24} + 3x^{18} + 18x^{12} + 9x^6 + 1 \\
q_{12} = 4x^9 + 4x^3 & q_{28} = 4x^{21} + 4x^7 \\
q_{13} = 1 & q_{29} = 1 \\
q_{14} = 2x^7 & q_{30} = 10x^{27} + 6x^{25} + 6x^5 + 10x^3 \\
q_{15} = 5x^{12} + 3x^{10} + 10x^6 + 1 & q_{31} = 1 \\
q_{16} = 0 & q_{32} = 0
\end{array} \tag{5}$$