Hans Walser, [20211220]

Wurzelrechtecke

1 Worum geht es?

Rechtecke mit dem Seitenverhältnis:

$$\sqrt{n} : 1, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Verallgemeinerung des DIN-Rechteckes

Kreisevolvente

Spiralen

2 Beispiele

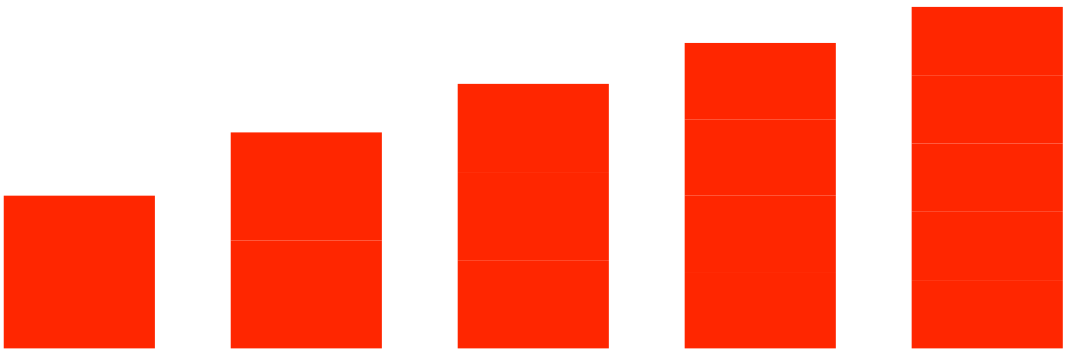

Abb. 1: Beispiele

Für $n = 2$ ergibt sich das klassische DIN-Format.

3 Sektoren

Die Diagonale des einen Rechteckes ist die Höhe des nachfolgenden (Abb. 2). Nachrechnen mit Pythagoras.

Abb. 2: Diagonalen

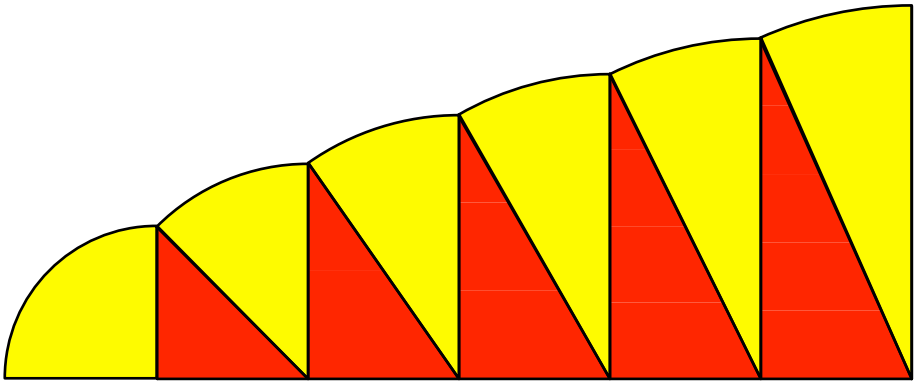

Abb. 3: Sektoren

Die Sektoren (Abb. 3) haben den Flächeninhalt S_n:

$$S_n = \tfrac{1}{2}\left(n+1\right)\operatorname{arccot}\left(\sqrt{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2}$$

Die Tabelle 1 gibt die ersten Werte. Die ersten beiden Flächeninhalte sind gleich. Anschließend haben wir ein monotones Wachstum.

n	S_n	S_n
0	1/4*Pi	0.7853981635
1	1/4*Pi	0.7853981635
2	3/2*arccot(2^(1/2))	0.9232195632
3	1/3*Pi	1.047197551
4	5/2*arccot(2)	1.159119022
5	3*arccot(5^(1/2))	1.261603006
6	7/2*arccot(6^(1/2))	1.356588403
7	4*arccot(7^(1/2))	1.445468496
8	9/2*arccot(2*2^(1/2))	1.529266093
9	5*arccot(3)	1.608752772
10	11/2*arccot(10^(1/2))	1.684525531
11	6*arccot(11^(1/2))	1.757056631
12	13/2*arccot(2*3^(1/2))	1.826726859
13	7*arccot(13^(1/2))	1.893848341
14	15/2*arccot(14^(1/2))	1.958680582
15	8*arccot(15^(1/2))	2.021442042
16	17/2*arccot(4)	2.082318636

Tab. 1: Flächeninhalt der Sektoren

Die Folge $\{S_n\}$ divergiert.

Für die Bogenlänge b_n der Sektoren gilt:

$$b_n = \sqrt{n}\,\operatorname{arccot}\left(\sqrt{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3}$$

Die Tabelle 2 gibt die ersten Werte. Sie sind monoton fallend.

n	bn	bn
0	1/2*Pi	1.570796327
1	1/4*2^(1/2)*Pi	1.110720734
2	3^(1/2)*arccot(2^(1/2))	1.066042127
3	1/3*Pi	1.047197551
4	5^(1/2)*arccot(2)	1.036747571
5	6^(1/2)*arccot(5^(1/2))	1.030094541
6	7^(1/2)*arccot(6^(1/2))	1.025484442
7	2*2^(1/2)*arccot(7^(1/2))	1.022100575
8	3*arccot(2*2^(1/2))	1.019510728
9	10^(1/2)*arccot(3)	1.017464590
10	11^(1/2)*arccot(10^(1/2))	1.015807115
11	2*3^(1/2)*arccot(11^(1/2))	1.014437119
12	13^(1/2)*arccot(2*3^(1/2))	1.013285747
13	14^(1/2)*arccot(13^(1/2))	1.012304519
14	15^(1/2)*arccot(14^(1/2))	1.011458303
15	4*arccot(15^(1/2))	1.010721021
16	17^(1/2)*arccot(4)	1.010072904

Tab. 2: Bogenlängen der Sektoren

Die Folge $\{b_n\}$ hat den Grenzwert 1.

4 Umlegen der Sektoren

Wir entfernen die noch sichtbaren halben Wurzelrechtecke (Abb. 4). Übrig bleibt die Folge der Sektoren.

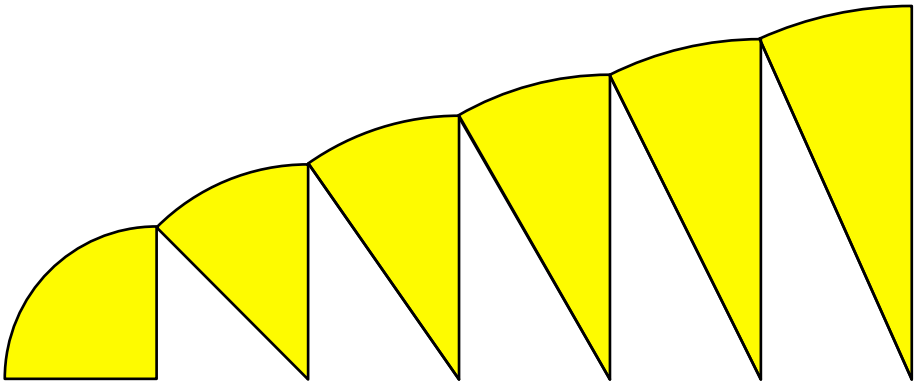

Abb. 4: Folge der Sektoren

Wir denken uns die Sektoren an den gemeinsamen Punkten gelenkig verbunden und klappen zusammen (Abb. 5). Es entsteht eine aus Kreisbögen zusammengesetzte Kurve mit glatten Übergängen.

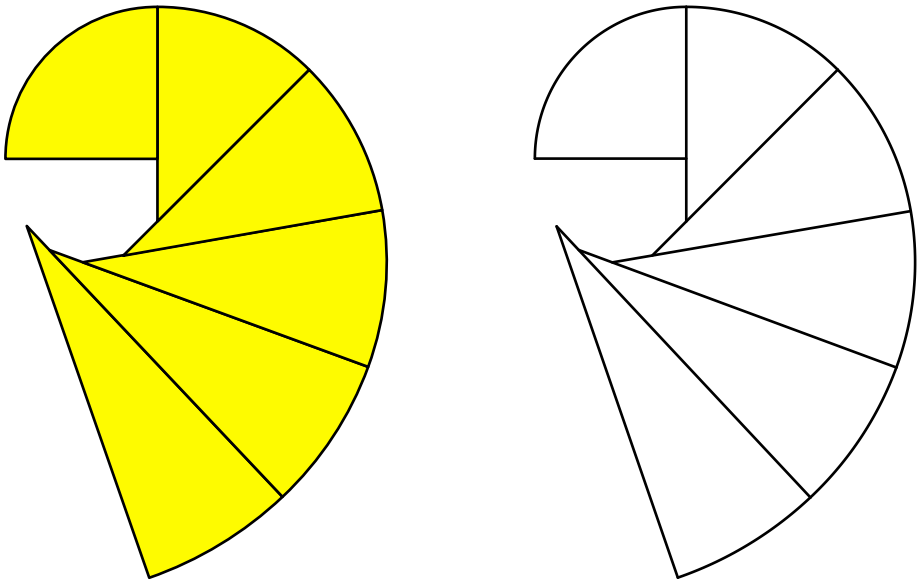

Abb. 5: Zusammenklappen

Die Abbildung 6 zeigt die ersten 101 Sektoren in zusammengeklappter Position.

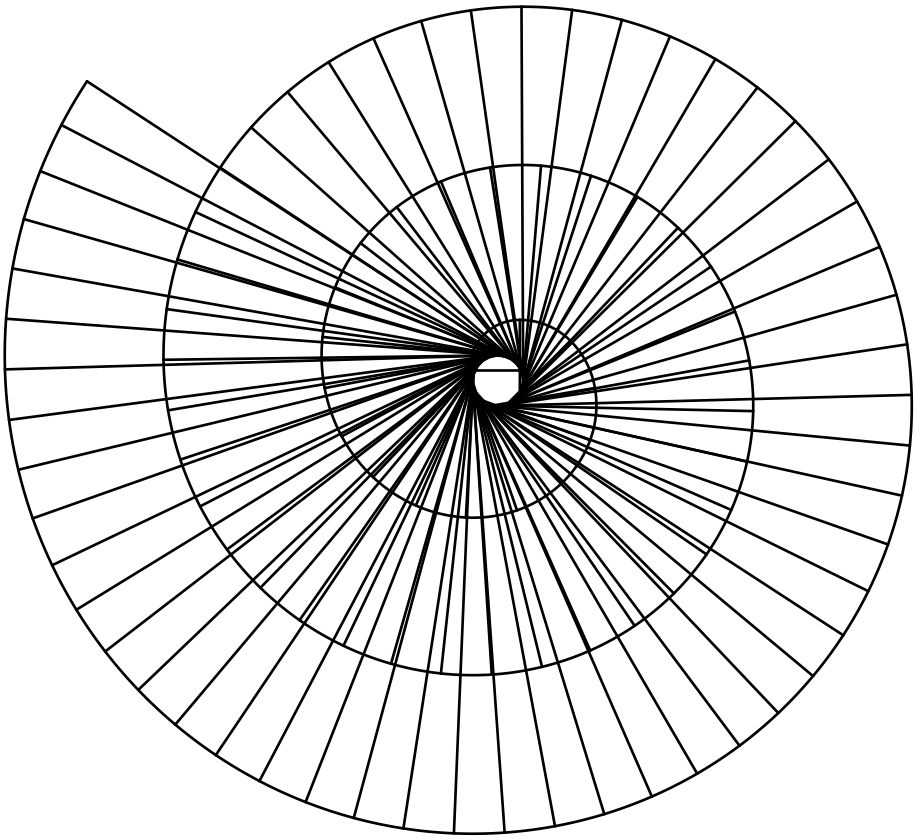

Abb. 6: 101 Sektoren

Zunächst glauben wir, eine Approximation einer archimedischen Spirale zu sehen. Andererseits sehen wir im Zentrum ein beinahe kreisrundes Loch.

Die Abbildung zeigt den durch aufeinanderfolgende Sektorenzentren gebildeten Polygonzug. Er scheint sich von innen einem Kreis mit Durchmesser 1 anzunähern.

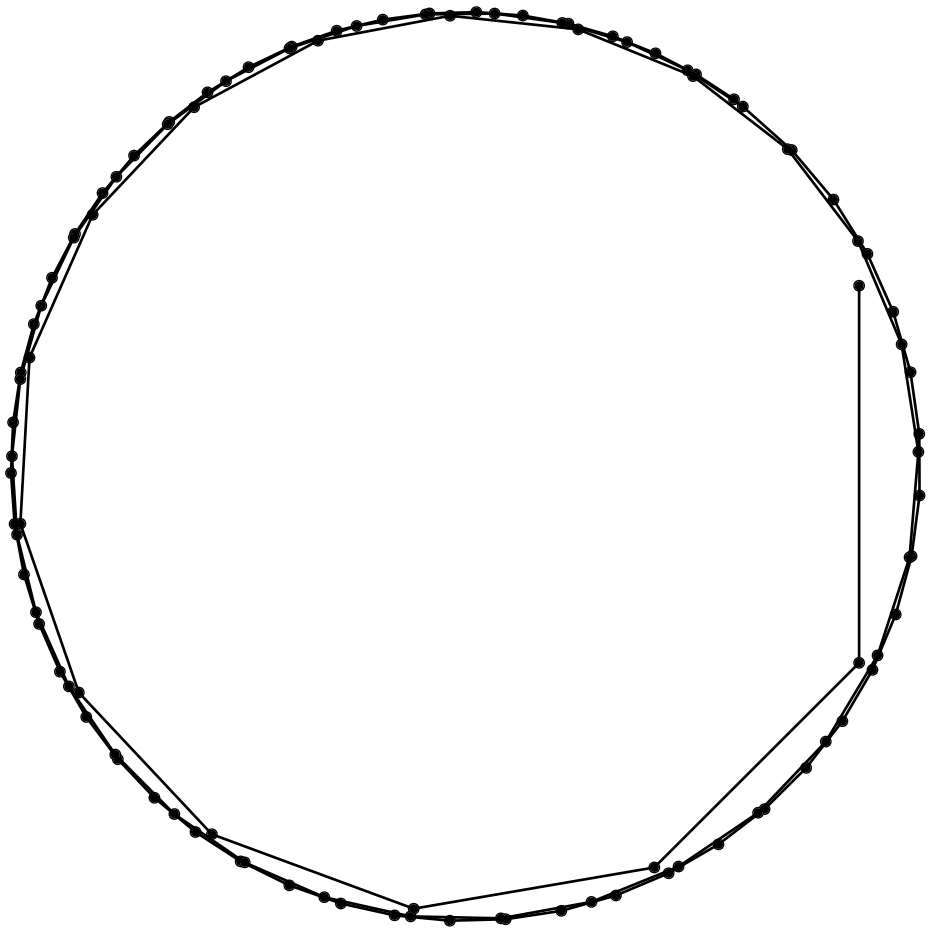

Abb. 7: Das kreisförmige Loch

Dies kann eingesehen werden wie folgt. Die n-te Strecke des Polygonzuges hat die Länge c_n:

$$c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4}$$

Die Richtungsänderung w_n beim Übergang von der n-ten Strecke zur $(n + 1)$-ten Strecke beträgt:

$$w_n = \operatorname{arccot}\left(\sqrt{n}\right) \tag{5}$$

Aus (4) und (5) ergibt sich eine Richtungsänderung bezogen auf die Längenänderung:

$$\frac{w_n}{c_n} = \frac{\operatorname{arccot}\left(\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \tag{6}$$

Die Tabelle 3 zeigt die ersten Werte.

n	w_n/c_n
0	1.570796327
1	1.896118900
2	1.936461873
3	1.954097237
4	1.964042793
5	1.970437895
6	1.974898553
7	1.978188124
8	1.980714653
9	1.982716256
10	1.984341200
11	1.985686699
12	1.986819222
13	1.987785552
14	1.988619865
15	1.989347438
16	1.989987550

Tab. 3: Relative Richtungsänderungen

Diese relativen Richtungsänderungen können als diskrete Krümmungen angesehen werden. Sie sind Näherungswerte für die Krümmung der approximierten Kurve. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arccot}\left(\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 2 \tag{7}$$

erhalten wir im Grenzfall die Krümmung 2. Eine Kurve mit der konstanten Krümmung 2 ist aber der Kreis mit dem Radius ½. Damit ist der Durchmesser 1 nachgewiesen. Ich hoffe, dass diese Argumentation stichhaltig ist.

Für den Mittelpunkt des Lochkreises erhielt ich mit einer Revolvermethode im Koordinatensystem der Abbildung 8 die Koordinaten (–0.4315, –0.1988).

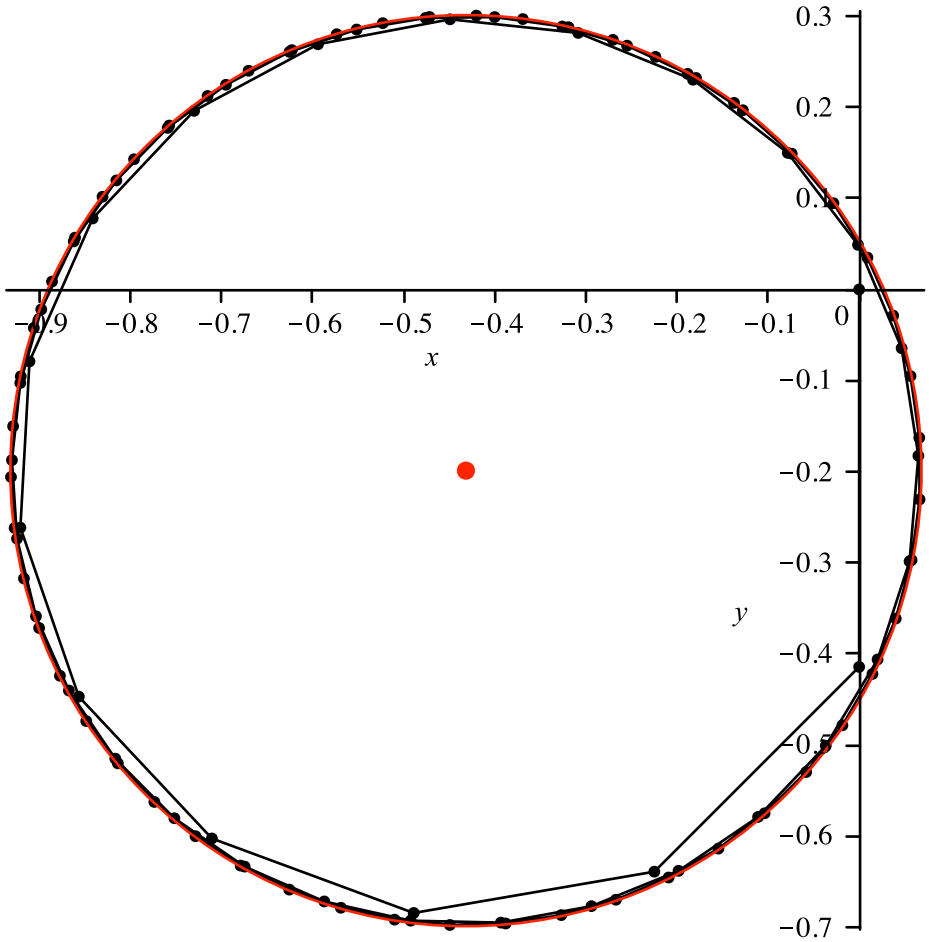

Abb. 8: Lochkreis

Daher ist es wohl sinnvoll, zu vermuten, dass die Kurve der Abbildung 6 die Kreisevolvente zum Lochkreis ist.

5 Unterteilung

Ein Hochformat-Rechteck mit dem Seitenverhältnis (1) lässt sich in n dazu kongruente Querformat-Rechtecke zerlegen. Beweis durch Nachrechnen. Die Abbildung 9 zeigt die Wurzelrechtecke für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

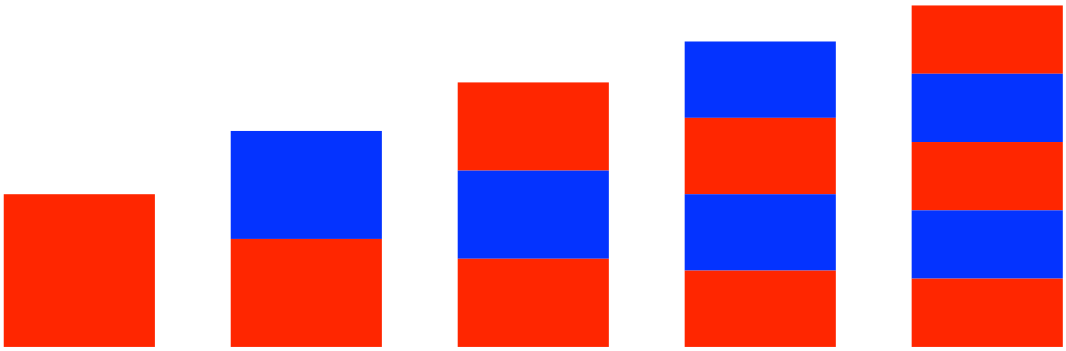

Abb. 9: Unterteilte Wurzelrechtecke

Die Abbildung 10 zeigt die ersten zehn unterteilten Wurzelrechtecke.

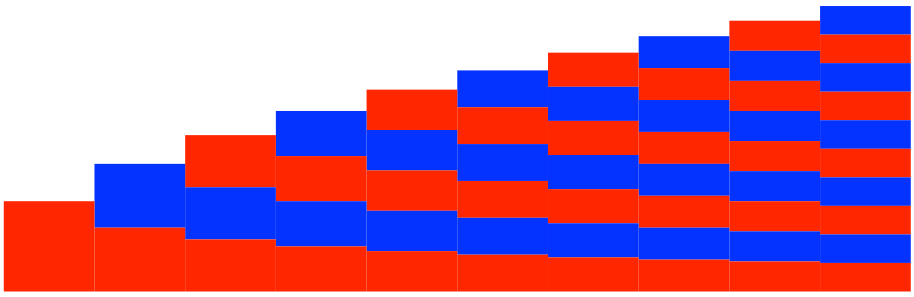

Abb. 10: Unterteilte Wurzelrechtecke

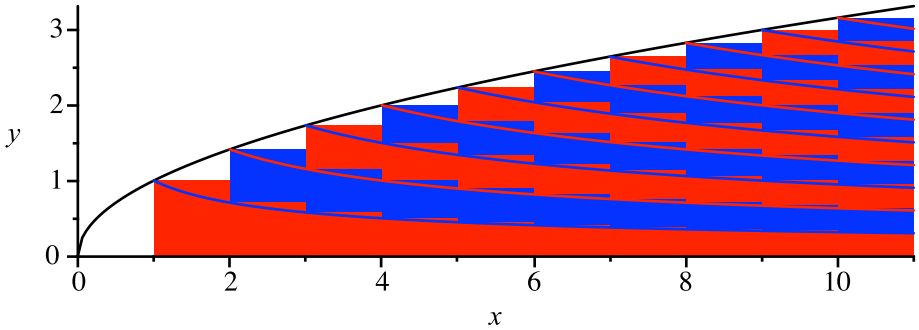

Abb. 11: Oberkurve und Unterkurve

Die Oberkurve (Abb. 11) ist die liegende Parabel:

$$y = \sqrt{x} \tag{8}$$

Die Unterkurven sind von der Form:

$$y = \frac{n}{\sqrt{x}} \tag{9}$$

Die Abbildung 12 zeigt die Kurven ohne die Wurzelrechtecke.

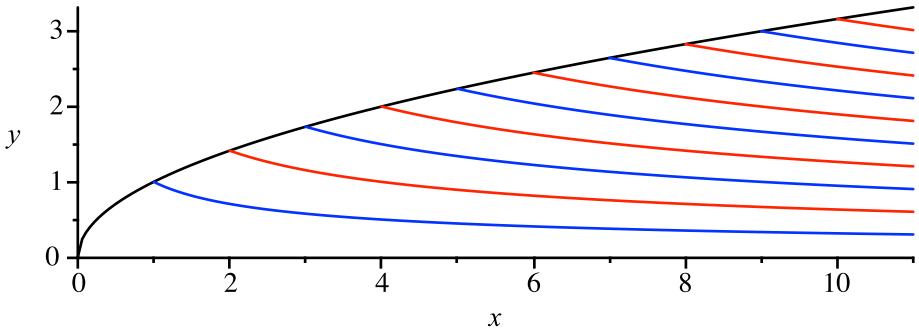

Abb. 12: Kurven

6 Eckige Wurzelspirale

Der Versuch, die Wurzelrechtecke spiralförmig anzuordnen, führt zu Überlappungen. Daher habe ich lediglich die Höhen der Rechtecke spiralförmig aneinandergefügt (Abb. 13).

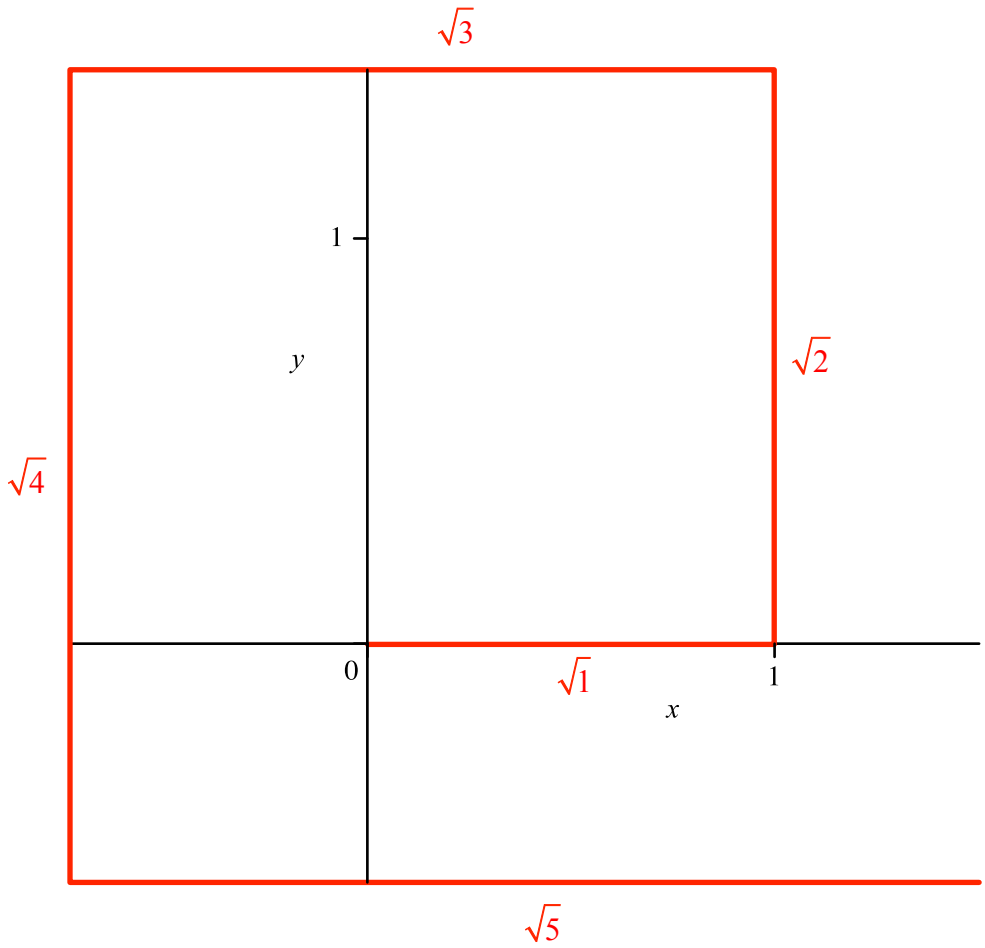

Abb. 13: Wurzelspirale

Die Abbildung 14 zeigt die ersten 100 Schritte.

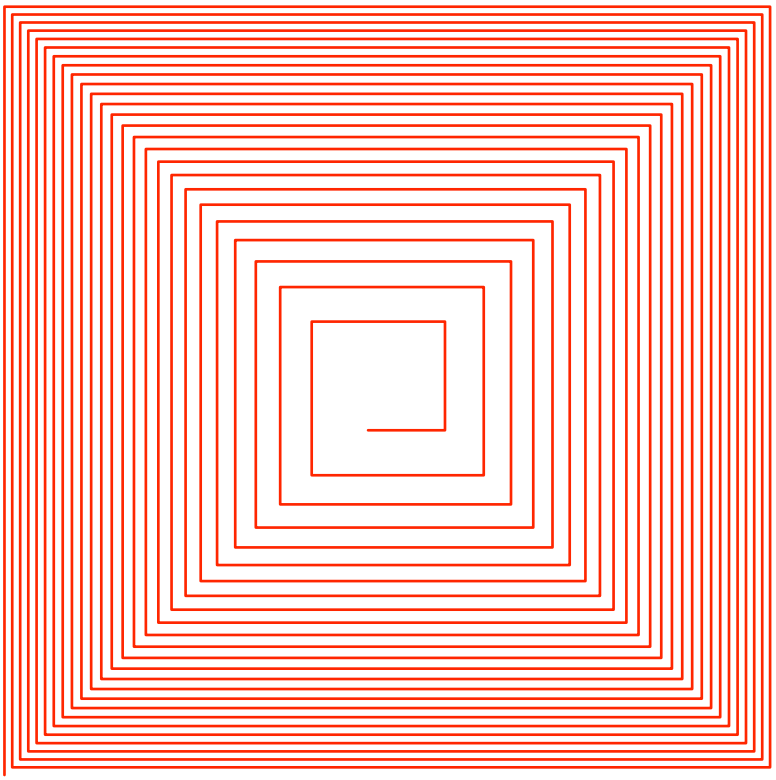

Abb. 14: Wurzelspirale