Hans Walser, [20090101a]

Wurzelberechnung nach einer Methode von Euler

1 Worum es geht

In [Euler 1802, Erster Theil, Zweiter Abschnitt, Kapitel 12] beschreibt Euler einen Approximations-Algorithmus zur Berechnung von Wurzeln. Das Verfahren ist im Wesentlichen die Methode von Newton-Raphson, hat aber einen eleganten Bezug zur Taylor-Entwicklung und der binomischen Formel.

2 Taylor

Für die Funktion $f(x) = x^s$ erhalten wir die k-te Ableitung:

$$f^{(k)}(x) = s(s-1)\cdots(s-k+1)x^{s-k}$$

Daraus ergibt sich die Taylor-Entwicklung:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x)\tfrac{1}{k!}\Delta x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} x^{s-k}\Delta x^k$$

2.1 Sonderfall

Für $s = n \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe ab, da $f^{(k)}(x) = 0$ für $k > n$. Somit ist:

$$(x+\Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^{n-k}\Delta x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\Delta x^k$$

Das ist die binomische Formel.

3 Die Idee von Euler

3.1 Beispiel: Quadratwurzel

Wir wollen $\sqrt{c} = c^{\frac{1}{2}}$ berechnen. Für $s = \frac{1}{2}$ erhalten wir:

$$(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x + \text{ höhere Glieder in } \Delta x$$

Wir wählen nun einen Startwert x_0 und setzen $c = x_0^2 + \left(c - x_0^2\right)$. Dabei soll x_0^2 die Rolle von obigem x und $c - x_0^2$ die Rolle von Δx spielen. Bei Abbruch nach dem ersten Glied (dem linearen Glied in Δx) erhalten wir:

$$\sqrt{c} = \left(x_0^2 + \left(c - x_0^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \approx \left(x_0^2\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\left(x_0^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(c - x_0^2\right) = x_0 + \tfrac{1}{2}\tfrac{c}{x_0} - \tfrac{1}{2}x_0 = \tfrac{1}{2}\left(x_0 + \tfrac{c}{x_0}\right)$$

Wir nennen diesen Nährungswert x_1 und iterieren. Damit ergibt sich die Rekursion:

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(x_n + \tfrac{c}{x_n}\right)$$

3.1.1 Vergleich mit Newton-Raphson

Wir bestimmen die positive Nullstelle von $g(x)=x^2-c$. Wegen $g'(x)=2x$ ergibt sich die Rekursion:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-c}{2x_n}=x_n-\frac{1}{2}x_n+\frac{c}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)$$

Das ist dieselbe Formel wie bei Euler.

3.1.2 Arithmetisches und geometrisches Mittel

In der Rekursion

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)$$

ist x_{n+1} das arithmetische Mittel von x_n und $\frac{c}{x_n}$. Für das geometrische Mittel dieser beiden Zahlen erhalten wir $\sqrt{x_n\cdot\frac{c}{x_n}}=\sqrt{c}$, also exakt die gesuchte Quadratwurzel. Das Verfahren von Euler oder Newton-Raphson besteht also darin, dass das geometrische Mittel durch das arithmetische Mittel approximiert wird.

3.2 Allgemein

Wir berechnen $\sqrt[q]{c}=c^{\frac{1}{q}}$. Die Taylor-Entwicklung liefert:

$$(x+\Delta x)^{\frac{1}{q}}=x^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{q}}\Delta x+\text{ höhere Glieder in }\Delta x$$

Wir setzen $c=x_0^q+\left(c-x_0^q\right)$ und erhalten:

$$\begin{aligned}\sqrt[q]{c}&=\left(x_0^q+\left(c-x_0^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\&\approx\left(x_0^q\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{q}\left(x_0^q\right)^{\frac{1}{q}-1}\left(c-x_0^q\right)=x_0+\frac{1}{q}cx_0^{1-q}-\frac{1}{q}x_0=x_0\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{q}cx_0^{1-q}\end{aligned}$$

Durch Iteration ergibt sich:

$$x_{n+1}=x_n\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{q}cx_n^{1-q}$$

3.2.1 Beispiel kubische Wurzel

Für $q = 3$ und $c = 125$ erhalten wir:

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \tfrac{1}{q}\right) + \tfrac{1}{q} c x_n^{1-q} = x_n\left(1 - \tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{3} 125 x_n^{1-3} = \tfrac{2}{3} x_n + \tfrac{125}{3} \tfrac{1}{x_n^2}$$

Mit dem Startwert $x_0 = 7$ liefert Excel:

n	x_n
0	7.000000000000
1	5.517006802721
2	5.046936042580
3	5.000435147754
4	5.000000037866
5	5.000000000000
6	5.000000000000

3.2.2 Vergleich mit Newton-Raphson

Wir bestimmen die positive Nullstelle von $g(x) = x^q - c$. Wegen $g'(x) = qx^{q-1}$ ergibt sich die Rekursion:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^q - c}{q x_n^{q-1}} = x_n - \frac{1}{q} x_n + \frac{c}{q x_n^{q-1}} = x_n\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q} c x_n^{1-q}$$

Das ist dieselbe Formel wie bei Euler.

3.2.3 Arithmetisches und geometrisches Mittel

Die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \tfrac{1}{q}\right) + \tfrac{1}{q} c x_n^{1-q}$$

können wir wie folgt umformen:

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \tfrac{1}{q}\right) + \tfrac{1}{q} c x_n^{1-q} = \tfrac{1}{q}\left((q-1)x_n + \tfrac{c}{x_n^{q-1}}\right) = \tfrac{1}{q}\left(\underbrace{x_n + \cdots + x_n}_{q-1 \text{ Summanden}} + \tfrac{c}{x_n^{q-1}}\right)$$

Somit ist x_{n+1} das arithmetische Mittel von $(q-1)$ Mal dem Summanden x_n sowie dem Summanden $\frac{c}{x_n^{q-1}}$. Für das geometrische Mittel dieser Glieder erhalten wir:

$$\left(\underbrace{x_n \cdot \cdots \cdot x_n}_{q-1 \text{ Faktoren}} \cdot \frac{c}{x_n^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x_n^{q-1} \frac{c}{x_n^{q-1}}} = \sqrt[q]{c}$$

Dies ist der exakte Wert der gesuchten Wurzel. Wir haben also auch hier eine Approximation des geometrischen Mittels durch ein arithmetisches Mittel.

3.2.4 Andere Verteilung der Gewichte

Für die kubische Wurzel hatten wir:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{c}{x_n^2}\right)$$

Die Zahlen x_n und $\frac{c}{x_n^2}$ werden im Verhältnis 2:1 gewichtet. Wir vertauschen nun die Gewichte und verändern ein bisschen (damit der Vergleich mit dem geometrischen Mittel funktioniert):

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + 2\sqrt{\frac{c}{x_n}}\right)$$

Wenn wir hier zum geometrischen Mittel übergehen, ergibt sich:

$$\frac{1}{3}\left(x_n + 2\sqrt{\frac{c}{x_n}}\right) = \frac{1}{3}\left(x_n + \sqrt{\frac{c}{x_n}} + \sqrt{\frac{c}{x_n}}\right) \quad \to \quad \left(x_n \cdot \sqrt{\frac{c}{x_n}} \cdot \sqrt{\frac{c}{x_n}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}$$

Das sollte also funktionieren. Für $c = 125$ und $x_0 = 7$ liefert Excel:

n	x_n
0	7.000000000000
1	5.150514182428
2	5.001105039459
3	5.000000061044
4	5.000000000000
5	5.000000000000

Das Verfahren ist also noch ein bisschen schneller, hat aber den großen Nachteil, dass wir in der Rekursion die Quadratwurzel benötigen.

Literatur

[Euler 1802] Euler, Leonhard: Vollständige Anleitung zur Algebra. Leipzig, 1802