

Hans Walser, [20140507a]

Würfelverdoppelung mit Stern und Spirale

1 Worum geht es?

Die volumenmäßige Würfelverdoppelung ist mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar. Es geht aber mit anderen Methoden, so auch mit einer geeigneten Spirale und eine regelmäßigen 3-Stern.

2 Spirale und Stern

Wir verwenden die logarithmische Verdoppelungsspirale, deren Abstand vom Zentrum sich mit einem Umlauf verdoppelt (Abb. 1a). Die Spirale hat die Parameterdarstellung:

$$x(t) = 2^t \cos(2\pi t)$$

$$y(t) = 2^t \sin(2\pi t)$$

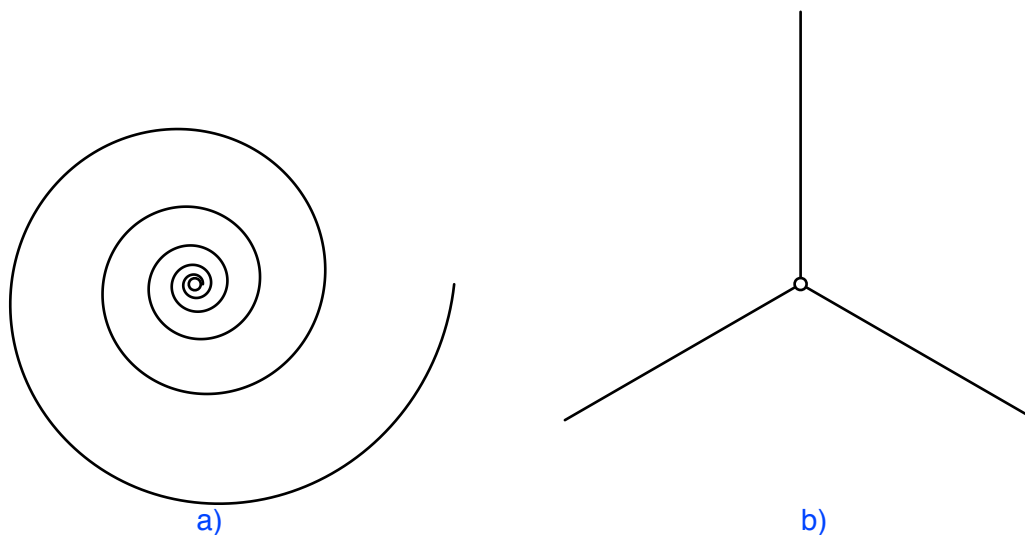


Abb. 1: Spirale und Stern

Die Abbildung 1b zeigt den Stern. Er erinnert an das Logo einer Automarke.

3 Vorgehen zur Würfelverdoppelung

Wir wollen den Würfel der Abbildung 2 volumenmäßig verdoppeln.

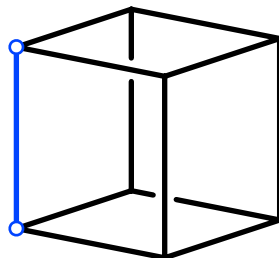


Abb. 2: Ausgangswürfel

Als Referenzlänge nehmen wir die senkrechte blau eingezeichnete Kante.

3.1 Übertragung auf Stern

Wir übertragen die Referenzlänge auf den senkrechten Ast des Sternes (Abb. 3). Zugleich setzen wir den Stern mittig auf die Spirale.

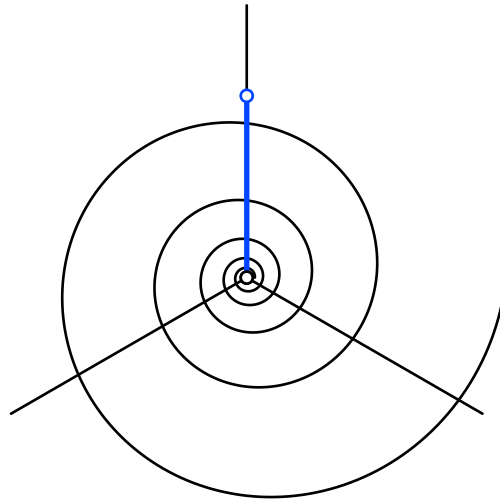


Abb. 3: Referenzlänge, Stern und Spirale

Wir sehen, dass der obere Punkt der Referenzlänge nicht auf der Spirale liegt.

3.2 Drehen der Spirale

Nun drehen wir die Spirale im Uhrzeigersinn. Dadurch wird sie scheinbar größer. Wir drehen so lange, bis sie durch den oberen Punkt der Referenzlänge geht (Abb. 4).

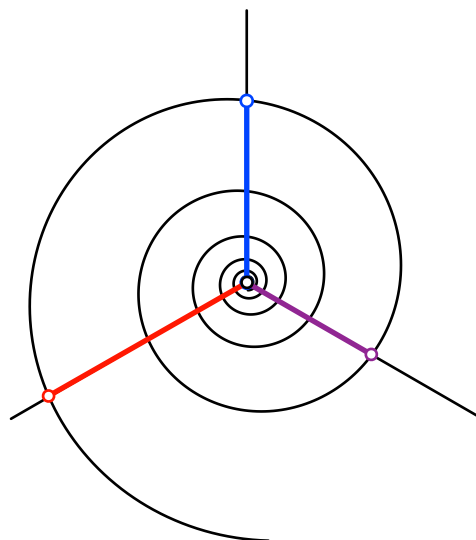


Abb. 4: Gedrehte Spirale

Auf den beiden anderen Ästen des Sterns haben wir nun eine Strecke (rot), welche etwas länger ist als die blaue Referenzstrecke sowie eine Strecke (lila), welche etwas kürzer ist als die blaue Referenzstrecke.

Die rote Strecke ist die Referenzlänge für den volumenmäßig doppelt so großen Würfel (Abb. 5a), die lila Referenzlänge gehört zum volumenmäßig halb so großen Würfel (Abb. 5b).

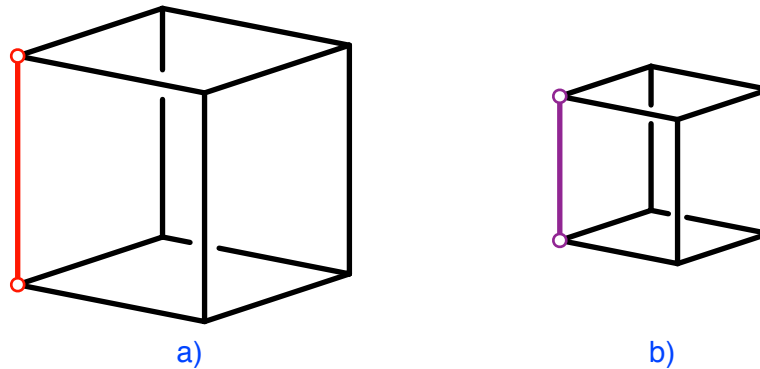


Abb. 5: Doppelt und halb so großes Volumen

4 Beweis

Der Beweis geht wie folgt. Bei einer logarithmischen Spirale wächst der Radius exponentiell mit dem Drehwinkel.

Für eine volle Drehung haben wir den Wachstumsfaktor 2. Für eine Drittdrehung ergibt sich der Faktor $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$. Das ist genau der Faktor, den wir als Längenveränderungsfaktor für die Volumenverdoppelung brauchen.

Kompetenzkontrolle: Welche Automarke wäre in einer 5d-Hyperwelt passend?