Hans Walser, [20131019]

Würfelpuzzle

1 Unterteilung des Quadrates

Wir unterteilen ein Quadrat durch seine Diagonalen in vier Dreiecke (Abb. 1) und färben diese mit genau vier Farben, zum Beispiel schwarz, rot, gelb und blau.

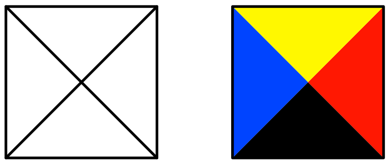


Abb. 1: Unterteilung des Quadrates

Auf wie viele Arten kann das geschehen?

Die Reflexantwort ist $4! = 24$. Das ist dann richtig, wenn das Quadrat sozusagen fest am Zeichenpapier orientiert ist. Die vier Beispiele der Abbildung 2 sind in diesem Sinne verschieden und je einzeln zu zählen.

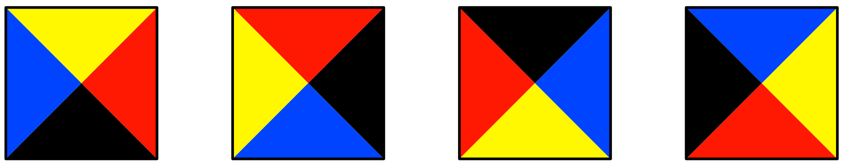


Abb. 2: Verschiedene Lösungen?

Die Lösungen gehen offensichtlich durch Drehungen auseinander hervor.

2 Zyklische Anordnungen

Wenn nun aber die Lage auf dem Papier unwesentlich ist, haben wir in allen vier Beispielen der Abbildung 2 dieselbe zyklische Anordnung der vier Farben.

Allgemein gibt es $(n-1)!$ zyklische Anordnungen von n Elementen.

In unserem Beispiel gibt es also 3! = 6 zyklische Anordnungen der vier Farben (Abb. 3).

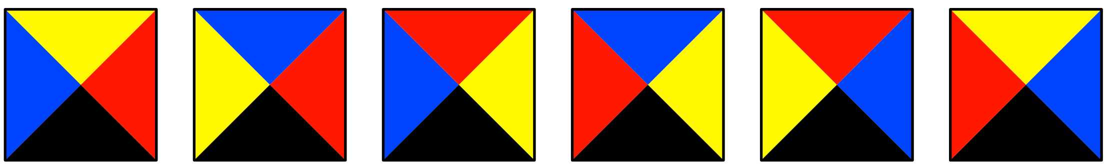


Abb. 3: Die sechs zyklischen Anordnungen

Wir wählen eine standardisierte Darstellung („unten schwarz“) und können dann noch die drei restlichen Farben permutieren. Die Abbildung 4 illustriert den kombinatorischen Sachverhalt mit dem üblichen Baumdiagramm.

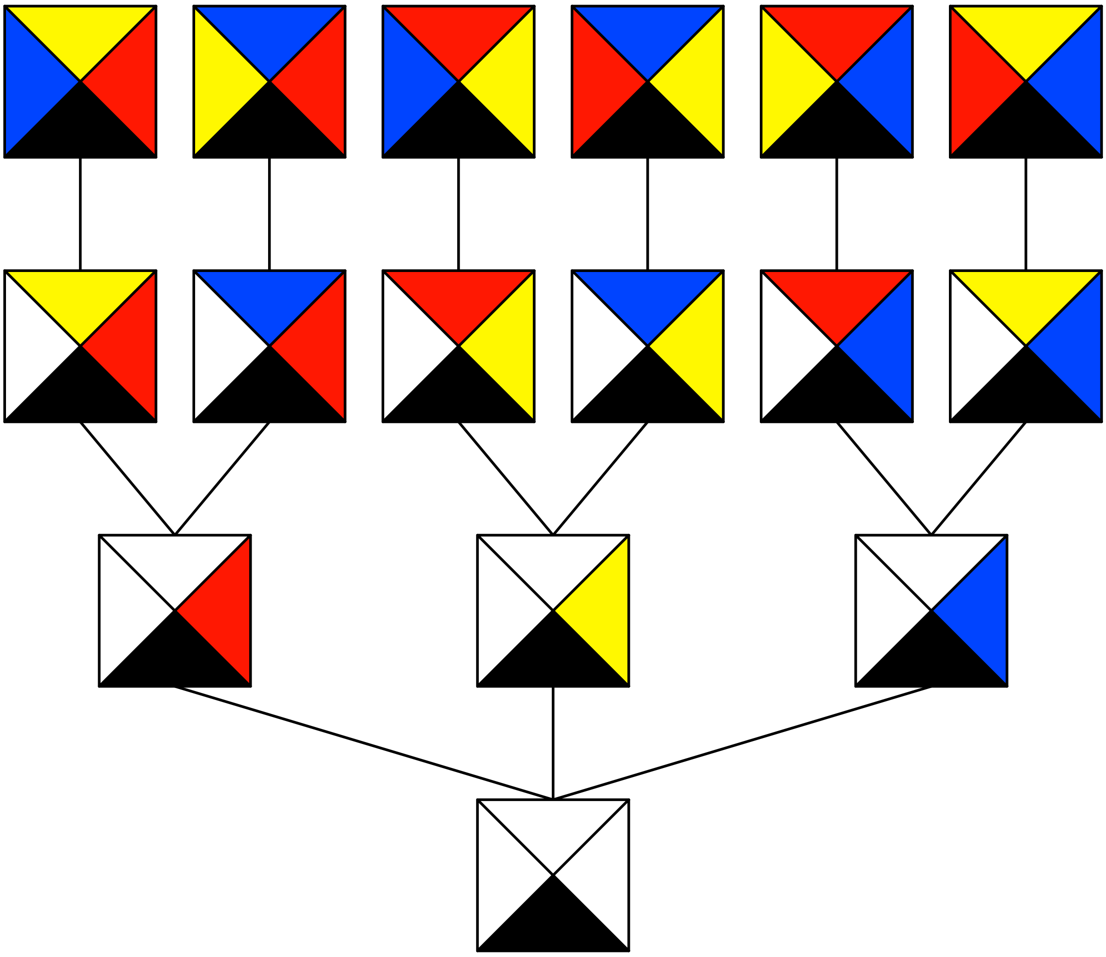


Abb. 4: Baum der Erkenntnis

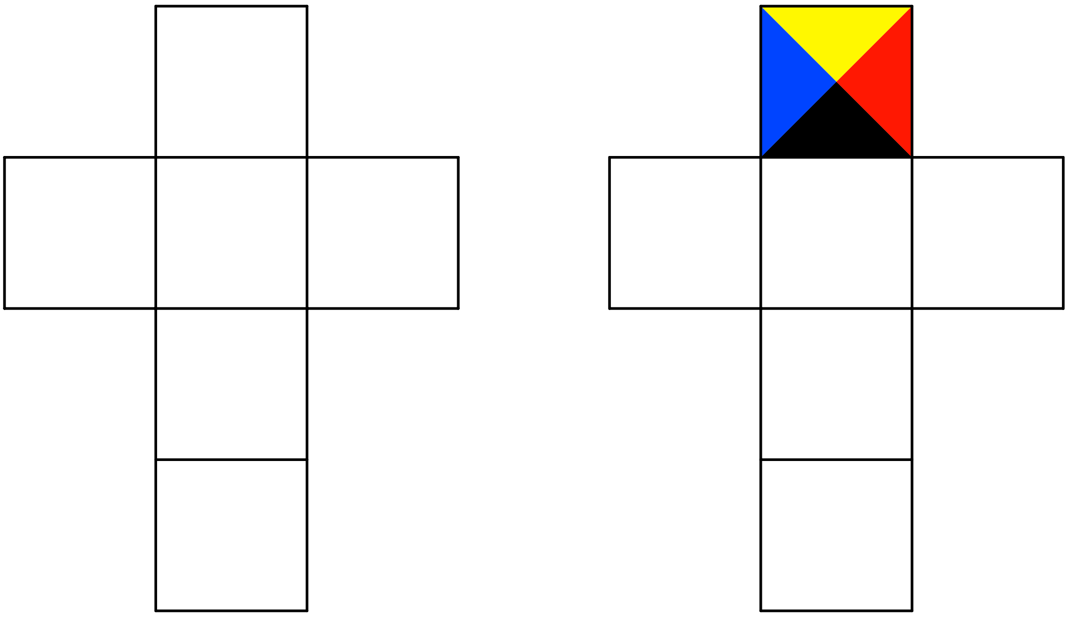
3 Der Würfel hat sechs Seiten

Wir möchten nun die sechs Quadrate der Abbildung 3 zu einem Würfel zusammensetzen unter der Nebenbedingung, dass an jeder Würfelkante jeweils gleiche Farben zusammenstoßen. Wir suchen also ein Quadromino auf der Würfeloberfläche.

Geht das, und wenn ja, auf wie viele Arten?

Die Abbildung 5a zeigt ein leeres Schnittmuster (Abwicklung, Würfelnetz) des Würfels, das nun gemäß unseren Vorgaben zu füllen ist. Wir legen das erste Quadrat der Abbildung 3 in den „Kopf" (Abb. 5b). Das ist eine Normierung, aber keine Beschränkung der Allgemeinheit. Wir können ja bei einem fertigen Würfel das Schnittmuster immer so hinlegen, dass dieses Quadrat in dieser Position in den Kopf zu liegen kommt.

Und jetzt ist räumliches Vorstellungsvermögen gefragt, um die restlichen fünf Quadrate richtig unterzubringen.

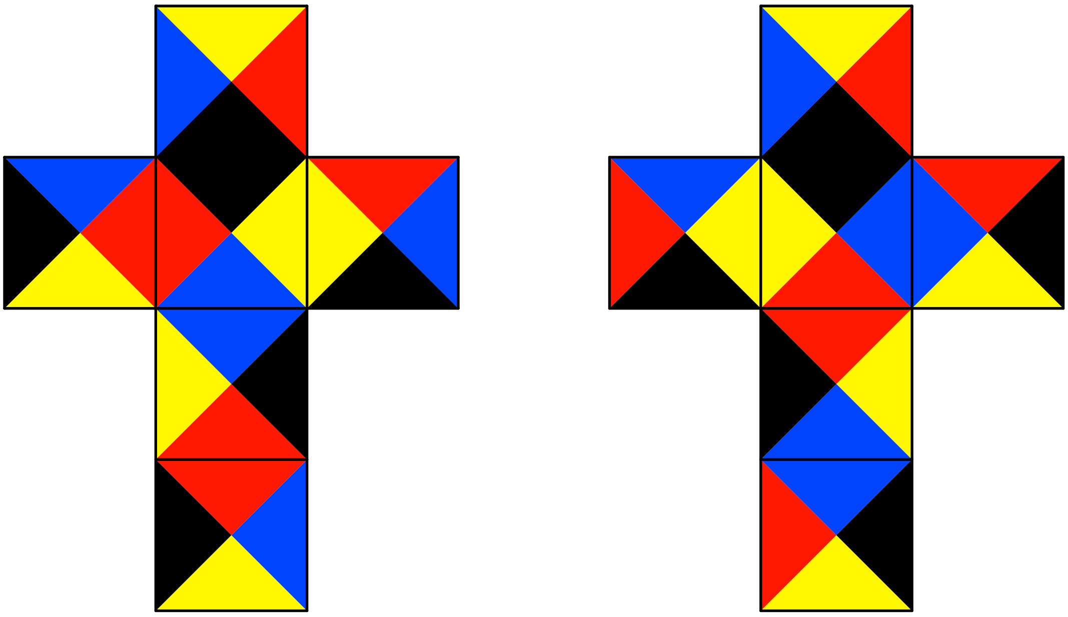


a) b)

Abb. 5: Abwicklung. Puzzle-Start

Mit einigem Knobeln finden wir die beiden Lösungen der Abbildung 6.

Vielleicht ist es sinnvoll, die sechs Quadrate der Abbildung 3 auf Karton aufzuziehen, auszuschneiden und als Spielmaterial auf einer Abwicklungsvorlage zu benutzen.



a) b)

Abb. 6: Zwei Lösungen

Bei diesen Lösungen befinden sich jeweils das zweite beziehungsweise das dritte Quadrat der Abbildung 3 (von links her gezählt) unter dem Kopf im Kreuzungspunkt des Schnittmusters. Die restlichen drei Quadrate sind in dieser Lage nicht möglich.

Wir zeigen das exemplarisch, indem wir das vierte Quadrat (schwarz-gelb-blau-rot) der Abbildung 3 unter den Kopf setzen (Abb. 7). Im grau getönten Quadrat bräuchten wir nun ein Quadrat mit zwei roten Teildreiecken. Das widerspricht unseren Vorgaben über die Färbungen. Analog können wir die anderen Fälle ausschließen.

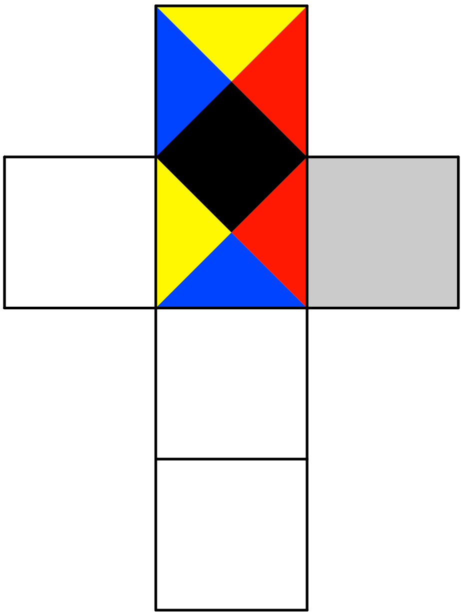


Abb. 7: Quadrat der Unmöglichkeit

Interessant ist nun, dass die beiden Lösungen der Abbildung 6 zu spiegelbildlichen Würfeln führen. Das ist deshalb so, weil mit dem einer Lösung entsprechenden Würfel auch der dazu spiegelbildliche Würfel zu einer Lösung führt. Da die Würfel selber keine Symmetrieebene haben, treten die Lösungen paarweise auf. Wir haben aber nur zwei Lösungen, also sind diese beiden spiegelbildlich.

Wer das nicht nur im Kopf sondern auch mit Augen und Händen erleben will kann aus den Schnittmustern der Abbildungen 8 und 9 die beiden Würfel als Papiermodelle basteln. Der Autor hat das wirklich getan, weil er seinen Überlegungen nicht ganz traute.

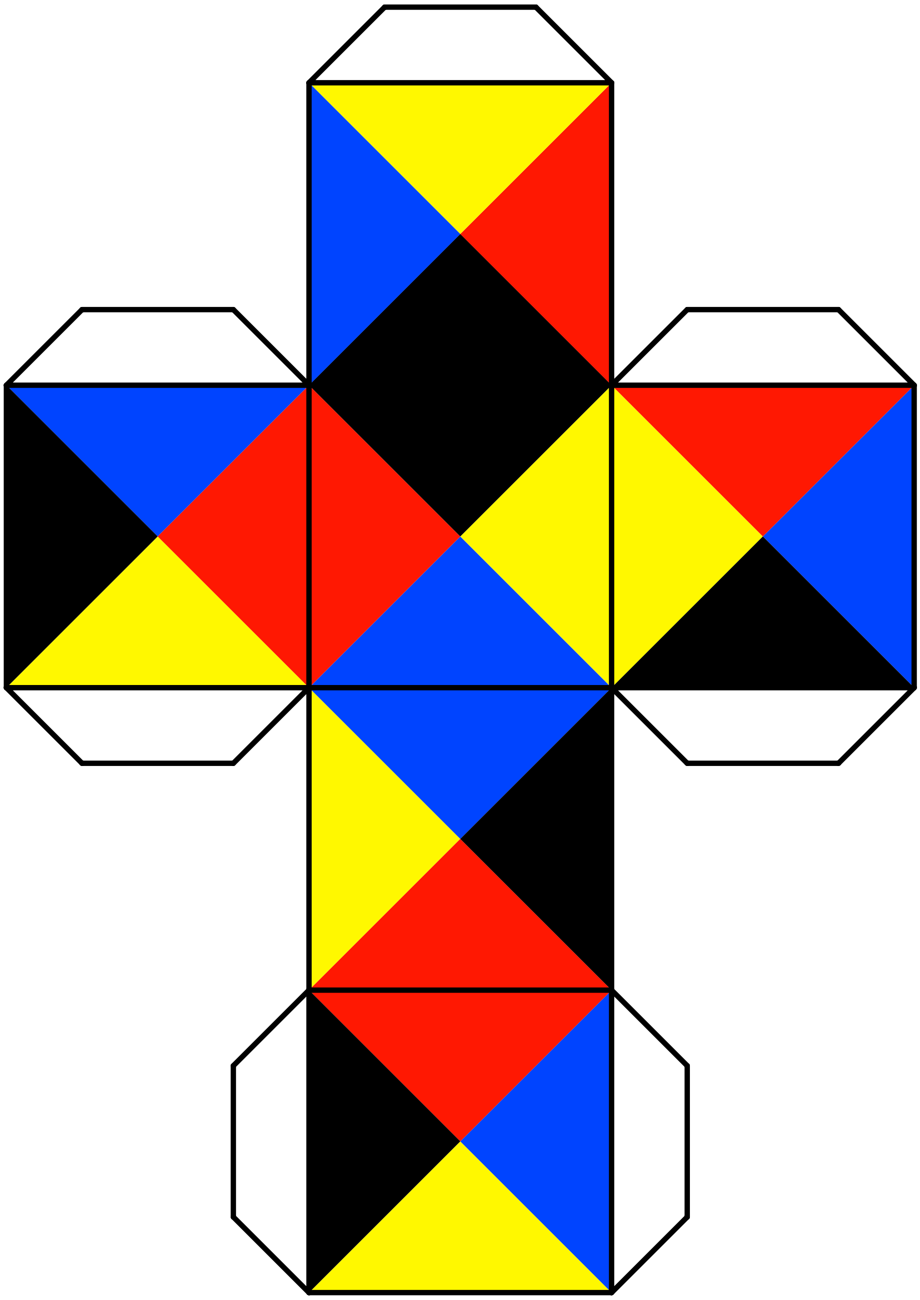


Abb. 8: Schnittmuster für die Lösung der Abbildung 6a

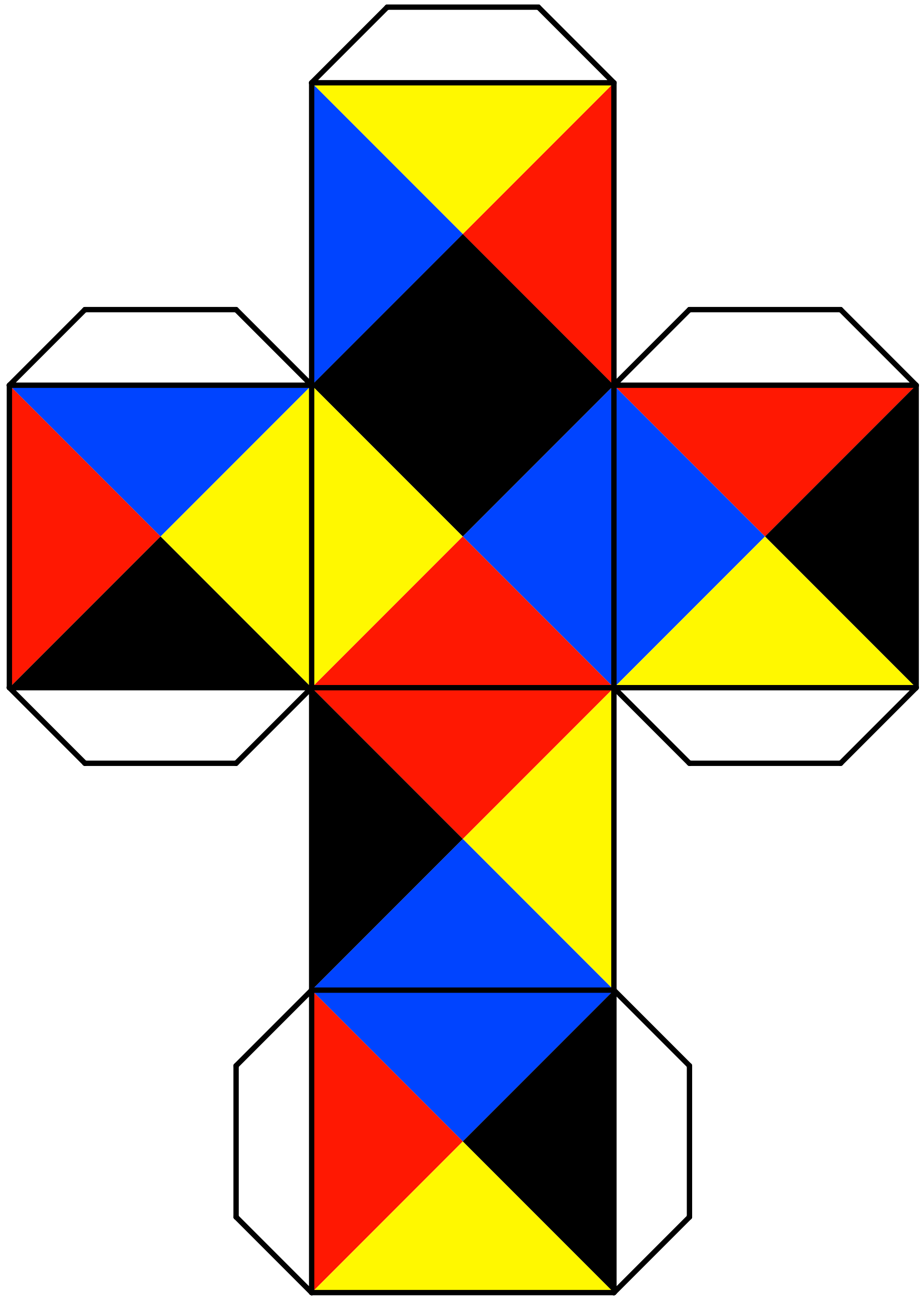
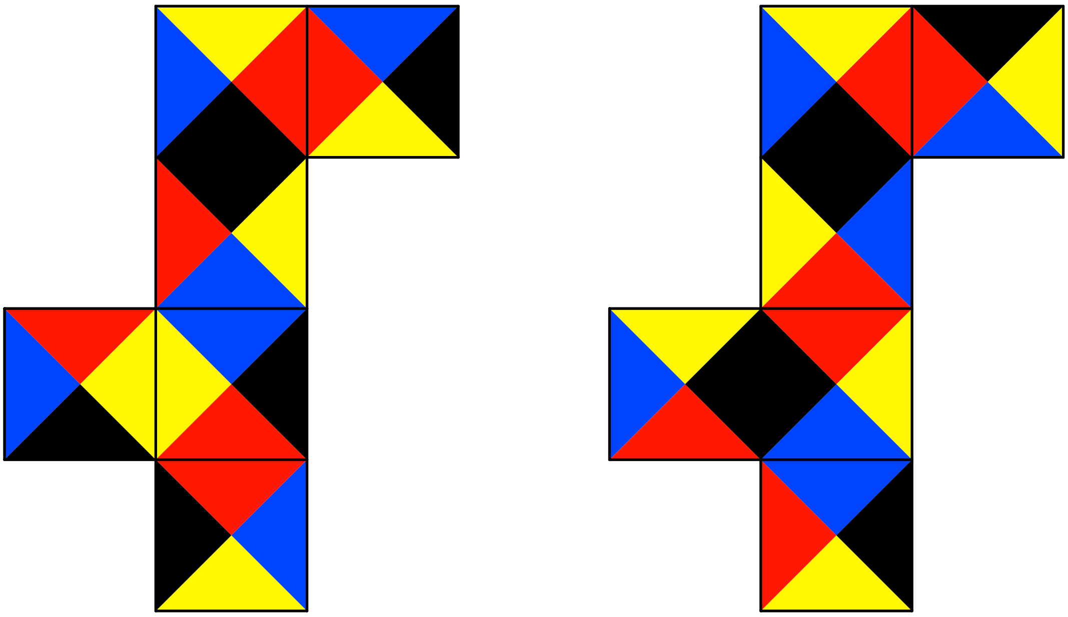


Abb. 9: Schnittmuster für die Lösung der Abbildung 6b

Bei der Vorgabe einer Abwicklung mit dem Umriss eines lateinischen Kreuzes (Abb. 5a) ergeben sich somit 48 Lösungen: Zunächst haben wir zwei Würfel-Lösungen. Auf jeder der sechs Würfelseiten können wir den Kopf des lateinischen Kreuzes auf vier Arten hinlegen (Drehungen um 90°). Somit gibt es $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ Lösungen.

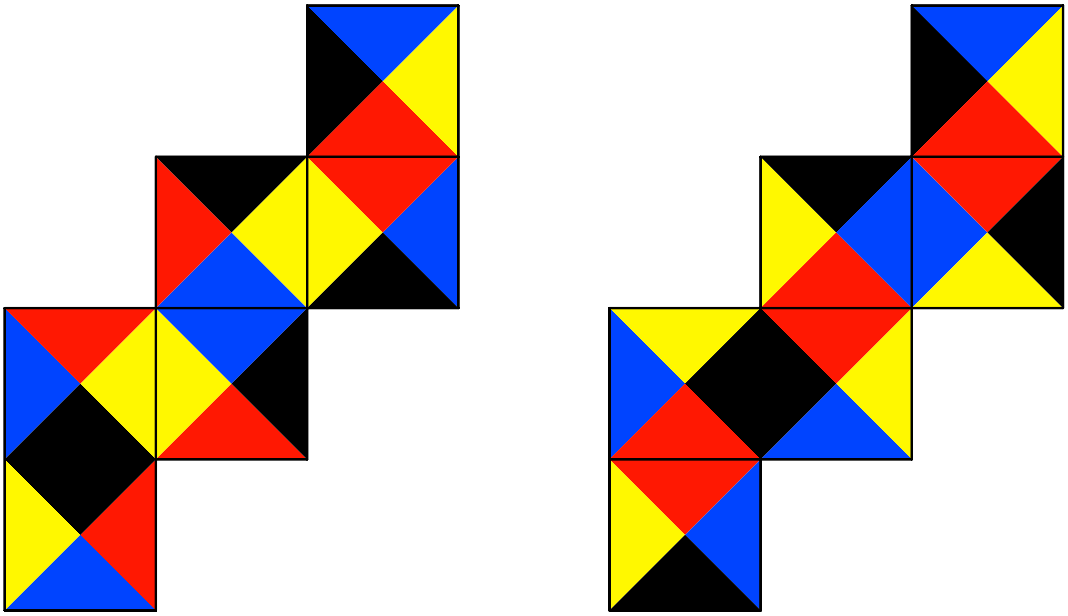
4 Variationen

Die Abbildungen 10 und 11 zeigen Variationen.



a) b)

Abb. 10: Variation



a) b)

Abb. 11: Variation

Die Abbildung 12 zeigt ein noch leeres Schnittmuster, das nicht geht. Warum?

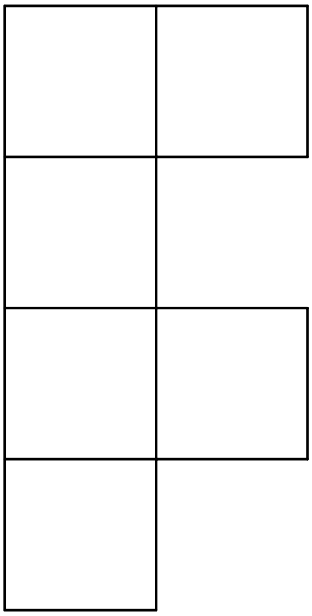


Abb. 12: Unmögliches Schnittmuster

Wir können zunächst beginnen gemäß Abbildung 10a und das Quadrat links abtrennen (Abb. 13). Nun ist es aber nicht möglich, das abgetrennte Quadrat im grauen Quadrat gemäß unseren Farbvorgaben unterzubringen.

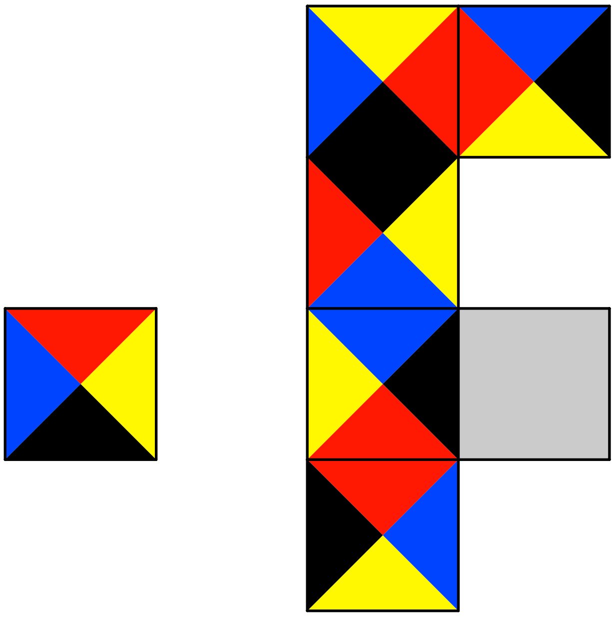


Abb. 13: Untauglicher Versuch

5 Muster und Parkette

Wir kopieren die Lösung der Abbildung 6a, stellen die Kopie auf den Kopf und fügen sie passend gemäß unseren Farbvorgaben an das Original an (Abb. 14).

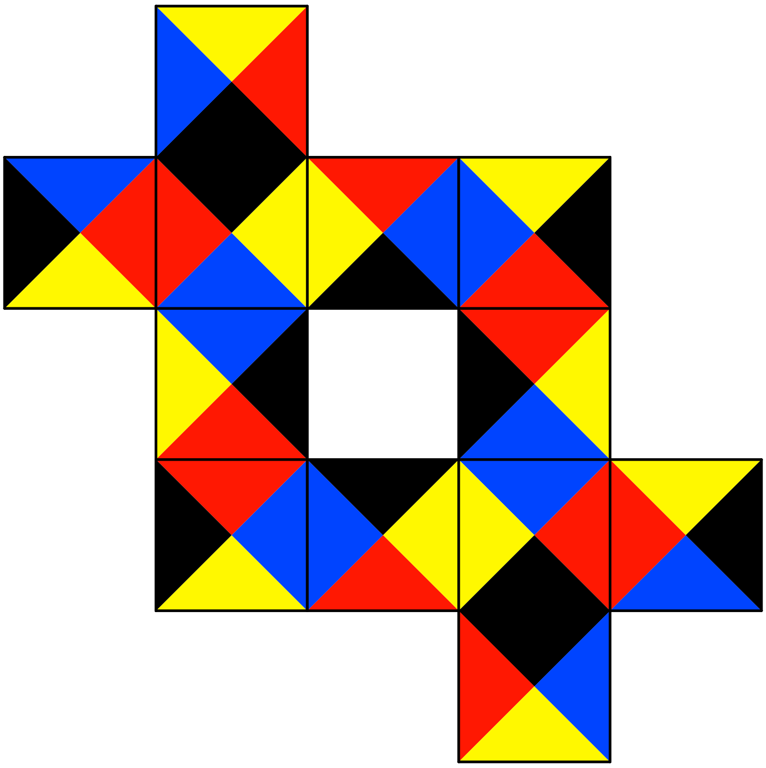


Abb. 14: Anfügen einer Kopie

Das weiße Loch können wir allerdings nicht füllen, es müsste schwarz sein. Die Gesamtfigur ist natürlich kein Schnittmuster für einen Würfel mehr, wir können aber auf mehrere Arten ein funktionierendes Schnittmuster herausschneiden. Die Abbildung 15 zeigt ein Beispiel dazu.

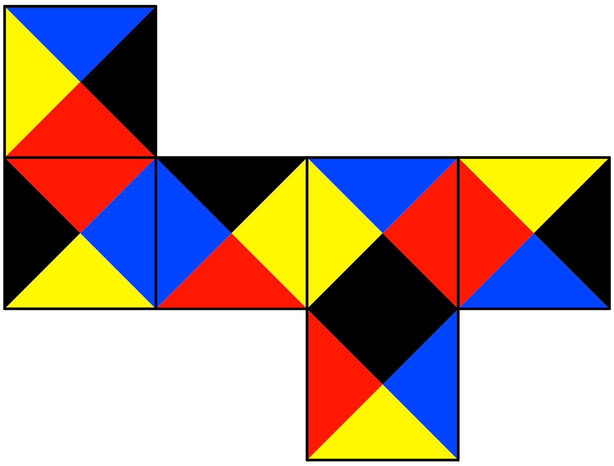


Abb. 15: Schnittmuster

Die Abbildung 16 schließlich zeigt ein ausführlicheres durchlöchertes Parkett.

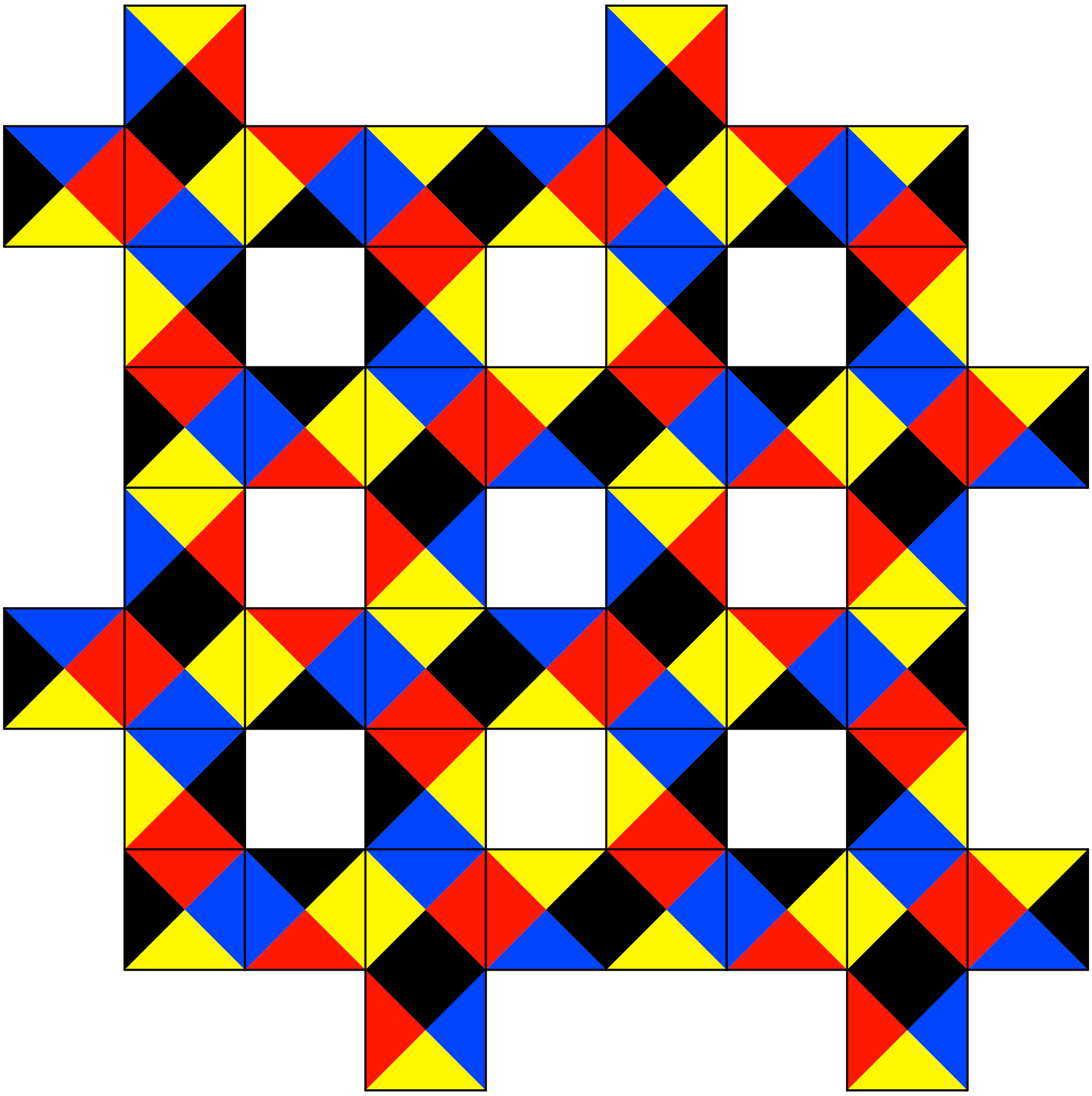


Abb. 16: Großes durchlöchertes Parkett