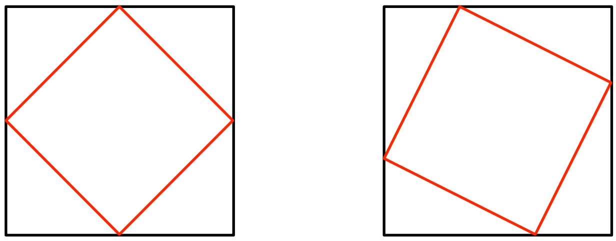
Hans Walser, [20170809]

Würfel und Oktaeder

Anregung: H. Sch., W.

1 Worum geht es?

Das Kantenmittenviereck eines Quadrates ist wiederum ein Quadrat (Abb. 1a). Die Diagonalen des einbeschriebenen roten Quadrates sind parallel zu den Seiten des schwarzen Ausgangsquadrates.

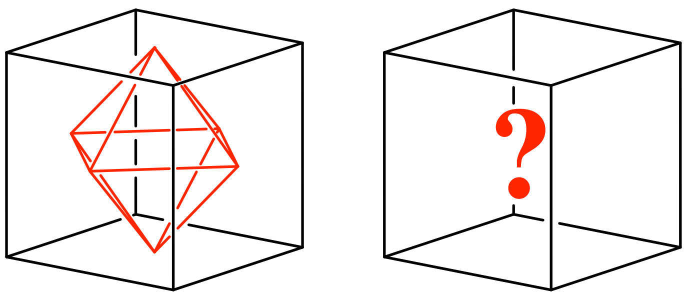


a) b)

Abb. 1: Quadrat im Quadrat

Wir können aber dem schwarzen Quadrat auch ein schiefstehendes rotes Quadrat einbeschreiben (Abb. 1b). Die Diagonalen des roten Quadrates sind nicht mehr parallel zu den Seiten des schwarzen Quadrates.

Im dreidimensionalen Raum bilden die Seitenmitten eines Würfels die Eckpunkte eines Oktaeders (Abb. 2a). Kann dem Würfel auch ein schiefstehendes reguläres Oktaeder einbeschrieben werden?



a) b)

Abb. 2: Oktaeder im Würfel

2 Oktaederecken auf Würfelkanten

Wir wählen im Würfel zwei diametrale Eckpunkte (blau in Abb. 3a). Die drei von diesen Würfelecken ausgehenden Kanten unterteilen wir im Verhältnis 3:1 (rot in Abb. 3a). Die insgesamt sechs Teilpunkte sind die Ecken eines regulären Oktaeders (Abb. 3b).

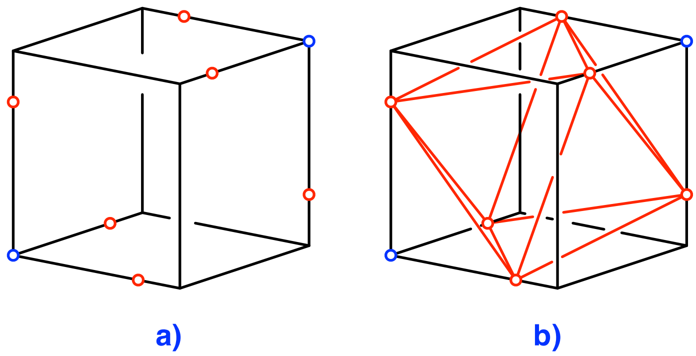


Abb. 3: Okteaderecken auf Würfelkanten

Von den zwölf Oktaederkanten liegen sechs auf der Würfeloberfläche. Diese haben im Einheitswürfel die Länge:

$$\tfrac{3}{4}\sqrt{2} \tag{1}$$

Die anderen sechs Oktaederkanten verlaufen im Würfelinneren. Für ihre Länge ergibt sich:

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + 1^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \tfrac{3}{4}\sqrt{2} \tag{2}$$

Das Oktaeder ist also regulär. Zu diesem Beispiel siehe [1] .

3 Allgemeine Lösung

Wir legen ein Koordinatensystem so in den Würfel, dass der Ursprung im Würfelmittelpunkt liegt, die Koordinatenachsen parallel zu den Würfelkanten liegen und die Seitenlänge des Würfels 2 ist (Abb. 4).

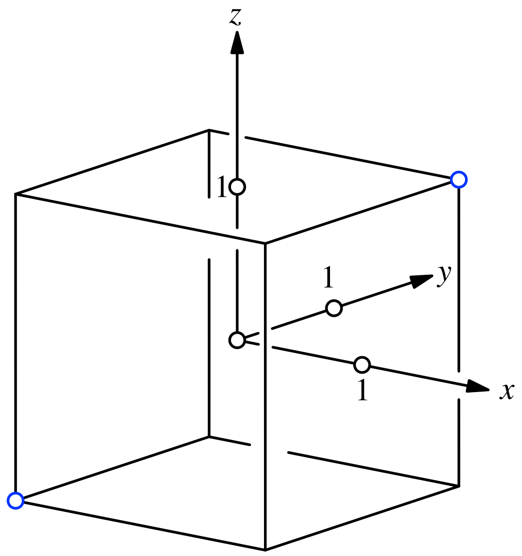


Abb. 4: Koordinatensystem

Nun legen wir einen Doppelkegel in den Würfel. Der Doppelkegel hat die Spitze im Ursprung, die Achse geht durch den Punkt $(1,1,1)$ und der halbe Öffnungswinkel ist:

$$\alpha = \arctan\left(\sqrt{2}\right) \approx 54.7356° \tag{3}$$

Die Abbildung 5 zeigt die Situation. Der Doppelkegel enthält Tripel paarweise orthogonaler Mantellinien.

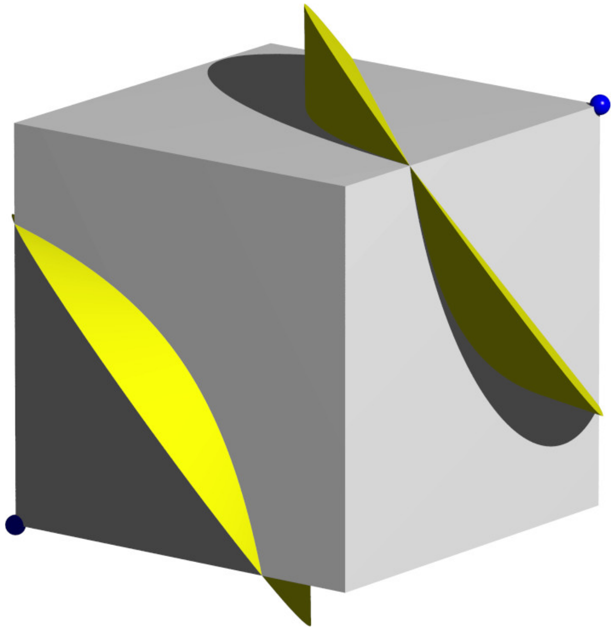


Abb. 5: Doppelkegel im Würfel

Der Doppelkegel schneidet aus jeder Würfelseite eine Hyperbel heraus. Für das Deckquadrat des Würfels ($z = 1$) hat die Hyperbel die Gleichung (CAS):

$$x + xy + y = 0 \tag{4}$$

Auf dieser Hyperbel liegen also beispielsweise der Seitenmittelpunkt des Deckquadrates, was zum Oktaeder der Abbildung 2a führt, oder der Punkt $\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$, was zum Oktaeder der Abbildung 3b führt.

Wir können nun irgendeinen Punkt auf dieser Hyperbel wählen. Zusammen mit den entsprechenden Punkten auf den anderen Würfelseiten erhalten wir die sechs Eckpunkte eines regulären Oktaeders.

Beispiel: Der Punkt $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right)$ erfüllt (4). Die sechs Punkte (rot in Abb. 6a)

$$\pm\left(-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},1\right),\pm\left(\tfrac{1}{2},1,-\tfrac{1}{3}\right),\pm\left(1,-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}\right) \tag{5}$$

sind die Ecken eines regulären Oktaeders. Man rechnet leicht nach, dass die Diagonalen alle gleich lang und paarweise orthogonal sind.

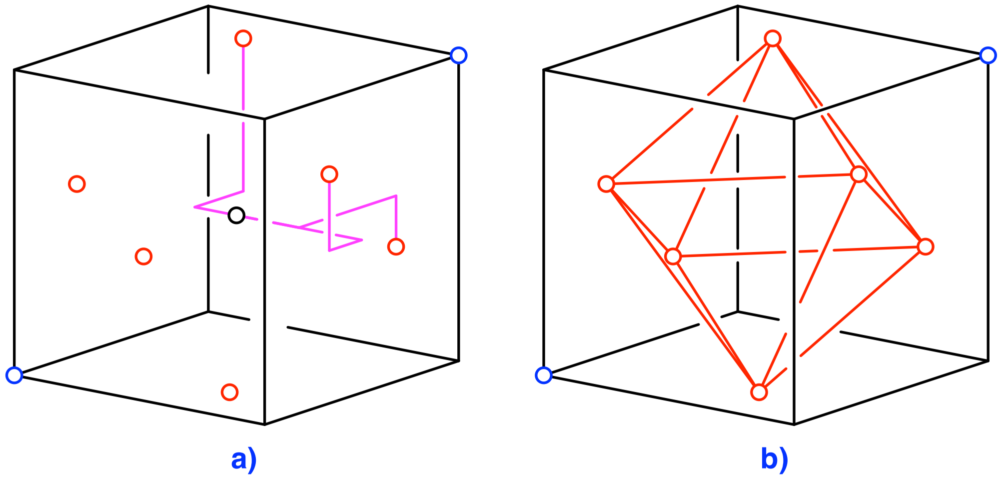


Abb. 6: Allgemeiner Fall

4 Volumenanteile

Das Volumen des Oktaeders der Abbildung 2a ist ein Sechstel des Würfelvolumens.

Das Volumen des Oktaeders der Abbildung 3b ist $\frac{9}{16}$ des Würfelvolumens.

Das Volumen des Oktaeders der Abbildung 6b ist $\frac{7^3}{6^4} \approx 0.2647$ des Würfelvolumens.

Websites

[1] Hans Walser: Würfel und Oktaeder (10.08.2017):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Wuerfel_und_Oktaeder/Wuerfel_und_Oktaeder.htm