

Hans Walser, [20051029a]

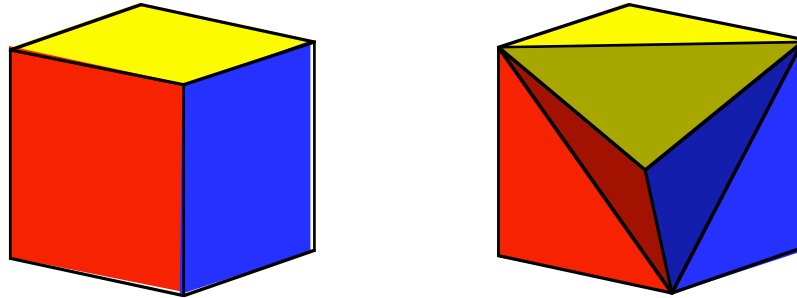
Würfel mit eingedrückten Ecken

Es werden zwei verschiedene Verfahren diskutiert, bei einem Würfel eine oder mehrere Ecken einzudrücken.

1 Erstes Verfahren

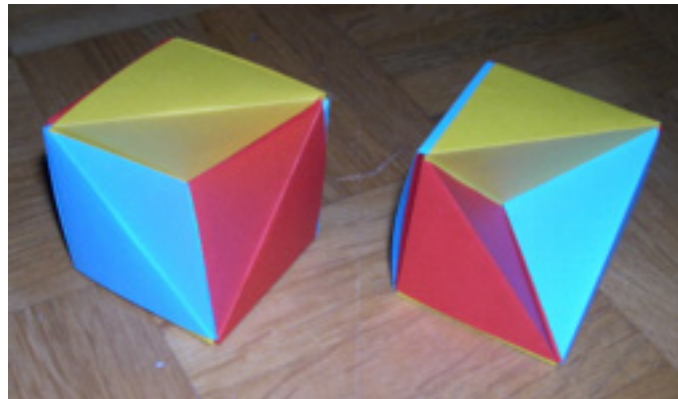
1.1 Eine Ecke wird eingedrückt

Wir drücken bei einem Würfel eine Ecke ein gemäß Figur.



Eine Ecke wird eingedrückt

Dabei gibt es unter Berücksichtigung der Farbgebung (je zwei gegenüberliegende Seiten des Würfels haben gleiche Farben) zwei spiegelbildliche Versionen, die nicht durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können.

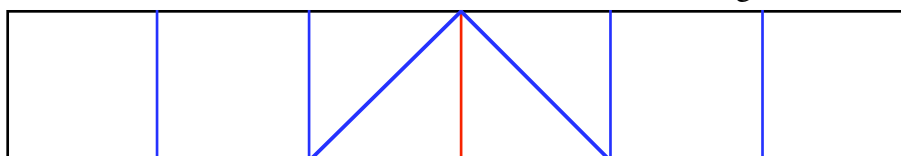


Spiegelbildliche Versionen

Der Ausgangswürfel kann als Flechtmodell mit drei Streifen realisiert werden, welche das folgende Faltmuster haben (vgl. [Hilton/Pedersen/Walser 2003] S. 154-155). Der Streifen ist aus 6 Quadraten zusammengesetzt, zwei davon sind beim Flechten zu überlappen und dienen nur der Stabilisation des Modells. In der Praxis muss die Streifenbreite etwas kleiner als die Quadratseite gewählt werden, um beim Flechten die Papierdicke zu kompensieren.

**Streifen für den Würfel**

Das Modell des Würfels mit einer eingedrückten Ecke kann ebenfalls als Flechtmodell mit drei Streifen realisiert werden. Die drei Streifen haben das folgende Faltmuster.

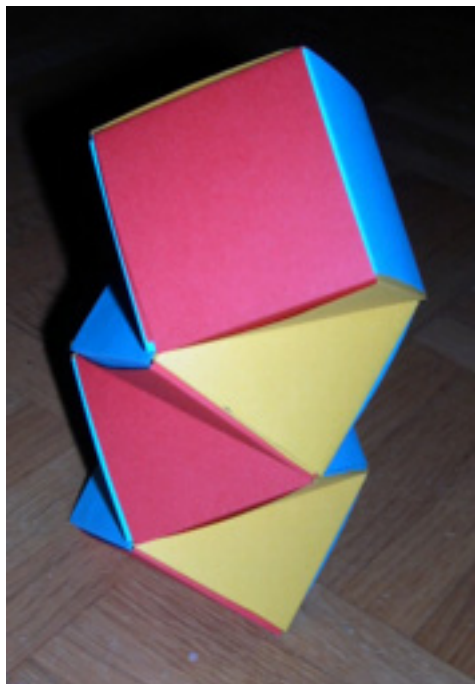
**Faltmuster**

In diesem Faltmuster sind blau die „Bergfalt-Linien“, welche im zusammengesetzten Modell zu Konvexkanten werden, und rot die „Talfalt-Linien“, welche zu Konkavkanten (Hohlkanten oder Kehlkanten) werden. Die beiden spiegelbildlichen Versionen können aus denselben Streifen geflochten werden. Die Spiegelbildlichkeit ergibt sich erst beim Flechten durch Vertauschen von Innenführung und Außenführung der Streifen.

Das Flechten der Modelle setzt inneren Seelenfrieden voraus.

Das Volumen des Würfels mit einer eingedrückten Ecke ist noch zwei Drittel des ursprünglichen Würfelvolumens. Wir können mehrere solche Modelle aufeinander stapeln, indem wir jeweils die dem Loch gegenüberliegende Ecke in ein Loch eines zweiten Modells einfügen. Die Foto zeigt vier Modelle aufeinander gestapelt.

Figuren mit derselben Struktur der Mantelfläche erhalten wir auch durch Aufeinanderstapeln von [Antiprismen](#) .

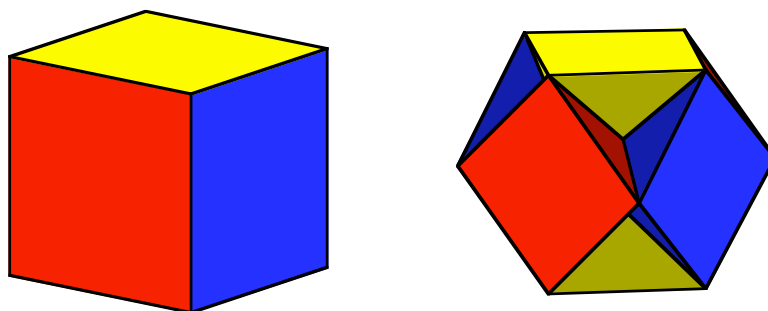


Stapel

Wenn wir auch die Gegenecke eindrücken wollten, ergäbe sich in der Mitte eine neckische Selbstdurchdringung (nicht ausprobiert).

1.2 Alle Ecken werden eingedrückt

Wenn wir alle Ecken eindrücken wollen, können wir bei jeder einzelnen Ecke höchstens bis zur Kantenmitte des Würfels gehen. Es entsteht eine Figur, deren konvexe Hülle ein Kuboktaeder ist. Das Volumen der Figur ist zwei Drittel des ursprünglichen Würfelvolumens.

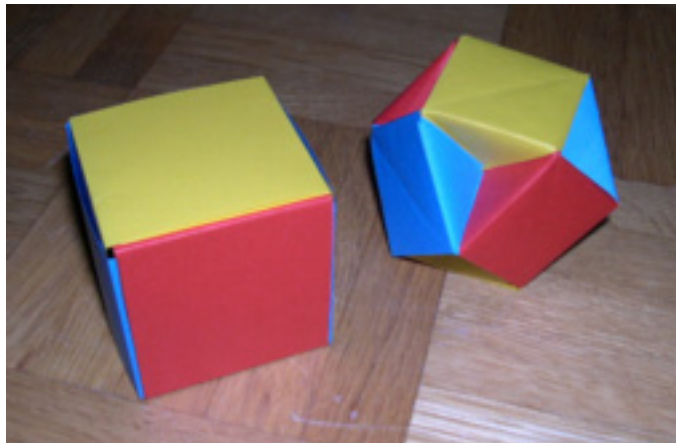


Würfel und derselbe Würfel mit eingedrückten Ecken

1.2.1 Flechtmodelle

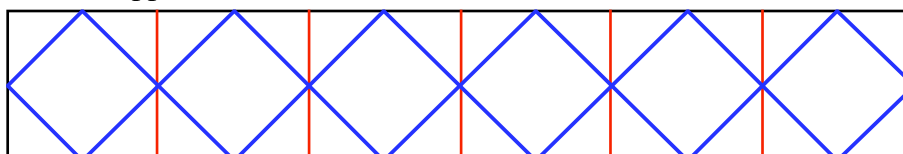
1.2.1.1 Flechtmodell mit drei Streifen

Das Foto zeigt den Würfel und den daraus abgeleiteten Würfel mit eingedrückten Ecken als Flechtmodelle mit je drei Streifen.



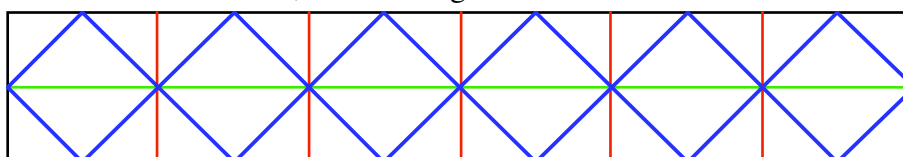
Flechtmodelle mit je drei Streifen

Das Flechtmodell des Würfels mit eingedrückten Ecken besteht aus drei Streifen mit folgendem Faltmuster. Das Faltmuster besteht aus 6 Einheiten, zwei davon sind beim Flechten zu überlappen.



Faltmuster

Ich habe als Hilfslinie beim Falten die Mittelparallele des Streifens verwendet. In der folgenden Figur ist diese Hilfsfaltlinie grün eingezeichnet. Im zusammengebauten Modell ist diese Linie keine Kante, sondern liegt in einer Ebene.



Faltmuster mit Hilfsfaltlinie

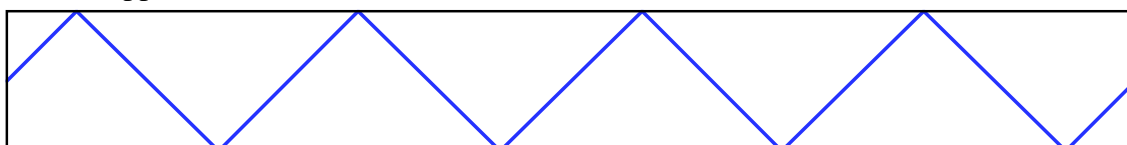
1.2.1.2 Flechtmodell mit vier Streifen

Die Foto zeigt links ein Flechtmodell des Würfels aus mit vier Streifen (vgl. [Hilton/Pedersen/Walser 2003] S. 160-161, [Pedersen 1981], p. 109) und rechts das entsprechende Modell mit eingedrückten Ecken.

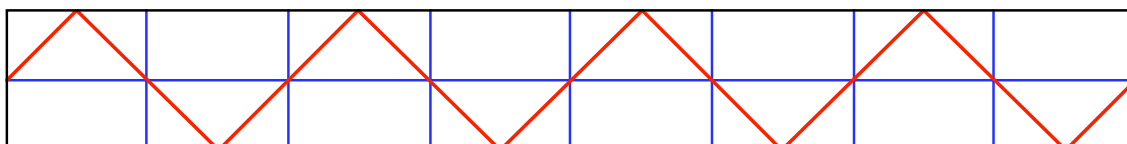


Flechtmodelle mit 4 Streifen

Das Faltmuster eines Streifens besteht aus 8 Einheiten, zwei davon sind beim Flechten zu überlappen.



Streifen für den Würfel



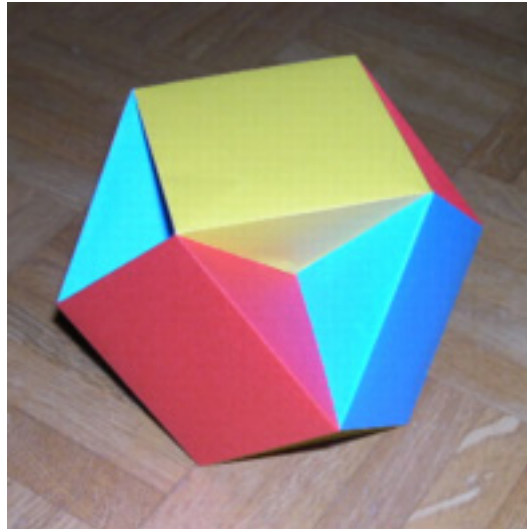
Streifen für den Würfel mit eingedrückten Ecken

1.2.2 Origami-Modelle

Die Modelle können auch nach der Origami Technik hergestellt werden.

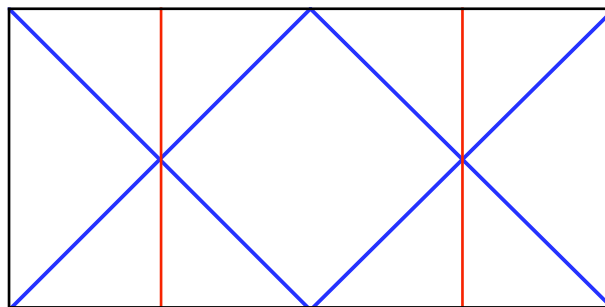
1.2.2.1 Origami-Modell mit 6 Bauteilen

Anregung: Astrid Baumann



Origami-Modell mit 6 Bauteilen

Jedes Bauteil kann aus einem halben Origami-Papier gefaltet werden.



Origami-Bauteil

Durch Aneinanderfügen von solchen Bauteilen ergibt sich der Streifen des Drei-Streifen-Faltmodells.

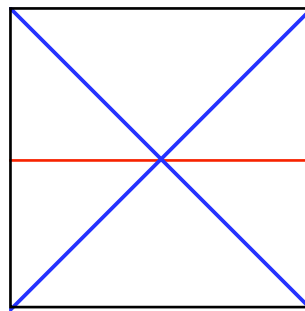
Die Mitte jedes Bauteils kommt auf die Mitte einer Seitenfläche des ursprünglichen Quadrates zu liegen. Wir haben also ein Flächenmodell, jede Seitenfläche könnte mit einer individuellen Farbe versehen werden.

1.2.2.2 Origami-Modell mit 12 Bauteilen



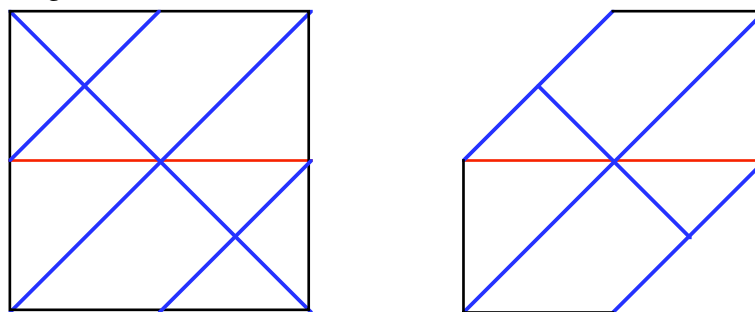
Origami-Modell mit 12 Bauteilen

Das Bauteil ist sehr einfach, das Modell ist allerdings etwas heikel beim Zusammenbau.



Origami-Bauteil

Wir modifizieren das Bauteil, indem wir zwei gegenüberliegende Ecken des Quadrates nach unten einbiegen.



Einbiegen von zwei Ecken

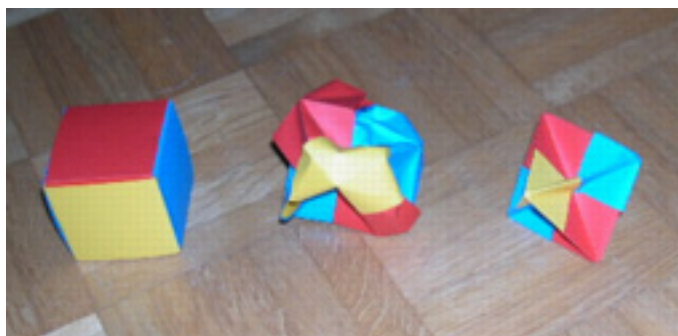
Damit erhalten wir ein Modell, bei welchem jede der zwölf Ecken individuell mit einer Farbe versehen werden kann. Das Modell ist heikel beim Zusammenbau und hält schlecht.



Eckenmodell mit 12 Origami-Bauteilen

2 Zweites Verfahren

Wir drücken die acht Ecken des Würfels so weit ein, dass gar kein Volumen mehr übrig bleibt. Die Foto zeigt von links nach rechts den Ausgangswürfel, das Resultat eines Versuches, die Ecken einzudrücken und das Modell mit total eingedrückten Ecken. Alle Modelle sind (oder waren) Flechtmodelle.



Ecken eindrücken

Das Modell mit total eingedrückten Ecken ist ein Gerüstmodell des Oktaeders.

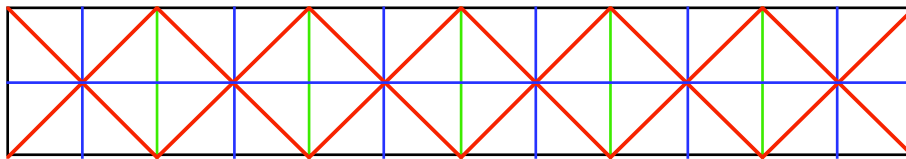
2.1 Flechtmodelle

2.1.1 Flechtmodell mit drei Streifen



Flechtmodell des Oktaedergerüstes mit drei Streifen

Das Flechtmodell besteht aus drei Streifen mit folgendem Faltmuster. Das Faltmuster besteht aus 6 Einheiten, zwei davon sind beim Flechten zu überlappen.

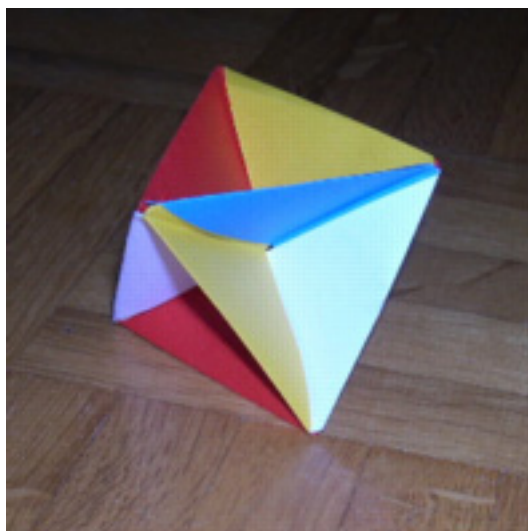


Faltmuster

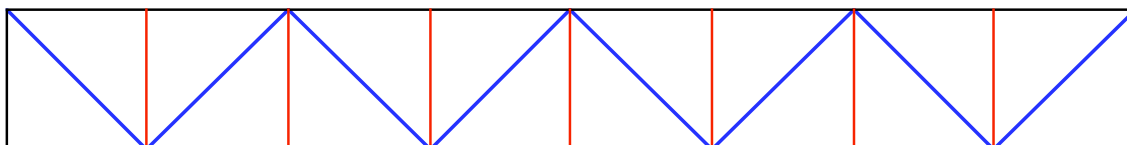
Jedes der sechs Quadrate besteht also aus den in Origami-Kreisen bestens bekannten gegengleich gefalteten Mittellinien und Diagonalen.

Wenn wir die eingedrückten Ecken des Oktaeders wieder herausstülpen, kommen wir natürlich wieder zum Würfel zurück.

2.1.2 Flechtmodell mit vier Streifen



Flechtmodell des Oktaedergerüsts mit vier Streifen



Streifen für das Oktaedergerüst

2.2 Origami-Modelle

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, das Oktaedergerüst mit der Origami-Technik zu bauen (vgl. [Mitchell 1997], p. 28-28).

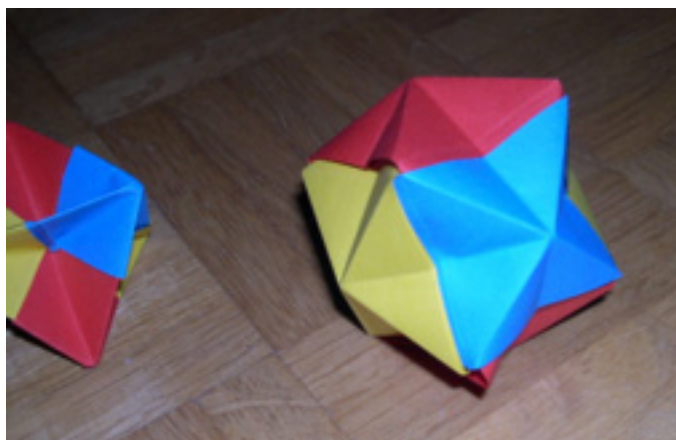
3 Kombination

Interessant ist nun folgendes. Wenn wir die eingedrückten Ecken des Oktaeders herausstülpen, aber nicht nach der zweiten, sondern nach der ersten Methode, kommen wir nicht mehr zum Würfel zurück, sondern erhalten eine neue Figur.

Diese Figur ist ein Oktaeder, auf dessen Seiten Dreikantpyramiden errichtet sind, welche rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen haben. Es ist also ein Beispiel eines Oktaedersternes.

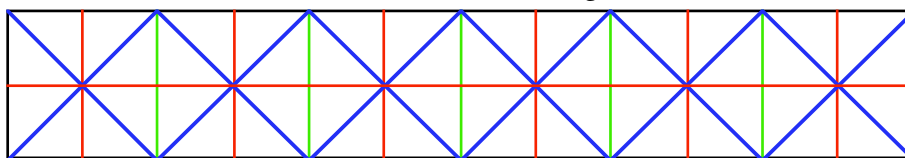
3.1 Flechtmodelle

3.1.1 Flechtmodell mit drei Streifen



Herausstülpen der Ecken

Auf Grund der Farbgebung des Flechtmodells erkennen wir den zugrunde liegenden Würfel. Die drei Streifen des Flechtmodells haben folgendes Faltmuster.



Faltmuster

Das Faltmuster ist invers zum Faltmuster des Oktaedergerüsts; Bergfalt-Linien werden zu Talfalt-Linien und umgekehrt. Das heißt aber, dass wir die gleichen Streifen wie beim Oktaedergerüst verwenden können, indem wir die Streifen einfach umwenden. Für die Modelle heißt dies, dass die Innenseite des Oktaedergerüsts zur Außenseite der neuen Figur wird und umgekehrt. Wir haben also einen Umstülpprozess im Sinne des Umstülpens eines Pullovers, so dass die Etikette außen im Nacken liegt.

Die Foto zeigt nochmals die ganze Figurengalerie der Drei-Streifen-Reihe.

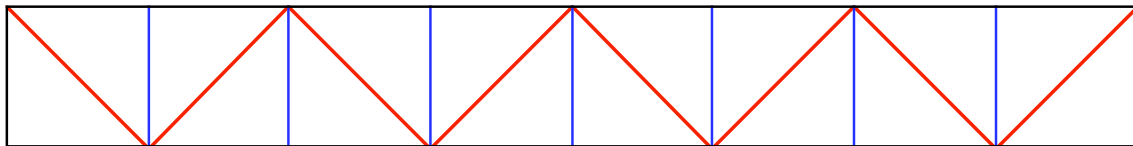


Modellreihe

3.1.2 Flechtmodell mit vier Streifen



Flechtmodell des Oktaedersternes mit vier Streifen



Streifen

Der Streifen ist derselbe wie der für das Oktaedergerüst, lediglich die Falrichtungen sind vertauscht. Das heißt aber, dass wir einfach einen Oktaedergerüst-Streifen umdrehen müssen, um einen Streifen für den Oktaederstern zu erhalten. Es wird wieder Innen und Außen vertauscht.

Die Foto zeigt die ganze Figurengalerie der Vier-Streifen-Reihe.

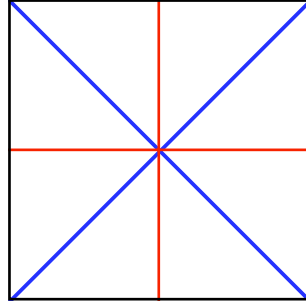


Modellreihe

3.2 Origami-Modelle

3.2.1 Origami-Modell mit sechs Bauteilen

Das Oktaedergerüst kann mit sechs baugleichen Origami-Teilen gebildet werden (vgl. [Mitchell 1997], p. 28-29).



Origami-Bauteil für Oktaeder-Gerüst

Mit denselben sechs Origami-Bauteilen können wir auch das umgestülpte Modell – also den Oktaederstern – bauen; wiederum muss Innen und Außen vertauscht werden (vgl. [Mitchell 1997], p. 63). Das Foto zeigt die beiden Modelle.



Origami-Modelle

3.2.2 Origami-Modell mit 12 Bauteilen

Anregung: Astrid Baumann

Das Bauteil ist das Standardbauteil für den Würfel in der Origami-Technik. In der Regel wird der Würfel als Flächemodell mit 6 Bauteilen gebaut. Es geht aber mit demselben Bauteil auch als Kantenmodell; dazu werden 12 Bauteile benötigt. Mit ebenfalls 12 Bauteilen lassen sich ein Oktaeder-Gerüst und der dazu inverse Oktaederstern bauen.



Oktaederstern aus 12 Origami-Bauteilen

Literatur

- [Hilton/Pedersen/Walser 2003] Hilton, Peter / Jean Pedersen / Hans Walser: Die Kunst der Mathematik. Von der handgreiflichen Geometrie zur Zahlentheorie. Dillingen: Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung, 2003
- [Mitchell 1997] Mitchell, David: Mathematical Origami. Norfolk: Tarquin Publications 1997. ISBN 1-899618-18-X
- [Pedersen 1981] Pedersen, J.J.: Some Isonemal Fabrics on Polyhedral Surfaces. The Geometric Vein (The Coxeter Festschrift), ed. by C. Davis, B. Grünbaum and F.A. Sherk. New York, Heidelberg, Berlin: Springer 1981, p. 99-122. ISBN 0-387-90587-1