Hans Walser, [20161205]

Wo steckt der Fehler?

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

1 Der Pythagoras-Baum

Die Abbildung 1 zeigt einen (angefangenen) Pythagoras-Baum. Das größte grüne rechtwinklige Dreieck beschriften wir in der schulüblichen Weise mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c.

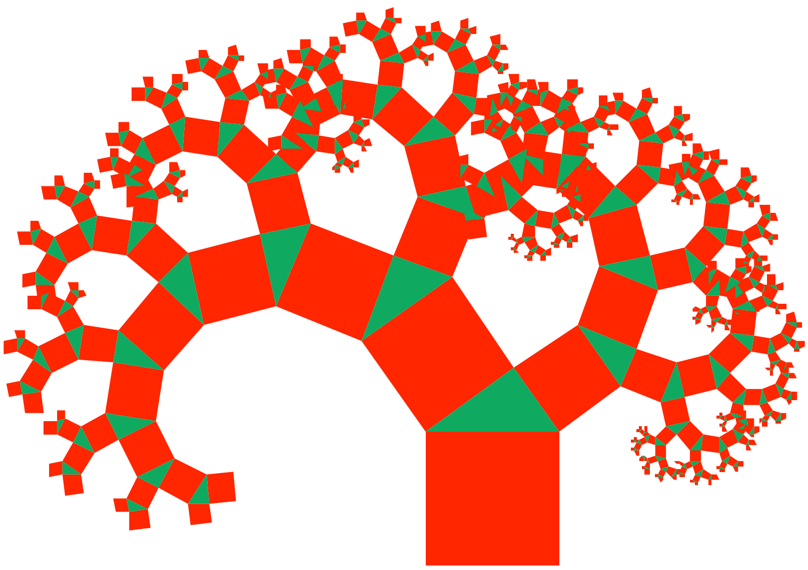

Abb. 1: Pythagoras-Baum

Nach dem Stamm teilt sich der Baum in zwei Äste, einen kleinen Ast über der Kathete a und einen großen Ast über der Kathete b.

Beide Äste sind ähnlich zur Gesamtfigur. Der kleine Ast hat gegenüber der Gesamtfigur den Längenverkürzungsfaktor $\frac{a}{c}$, der große Ast hat gegenüber der Gesamtfigur den Längenverkürzungsfaktor $\frac{b}{c}$.

Die Äste überlappen sich. Für die folgende Flächenberechnung wollen wir die überlappenden Teile entsprechend mehrfach zählen.

2 Flächenberechnung. Wo ist der Fehler?

Wir bezeichnen mit x den Flächeninhalt der Gesamtfigur, wobei wir bei Überlappungen entsprechend mehrfach zählen.

Zur Berechnung des Flächeninhaltes x zerlegen wir die Gesamtfigur in drei Teile.

Der erste Teil sei der Stamm (Flächeninhalt c^2) mit dem großen grünen Dreieck (Flächeninhalt $\frac{ab}{2}$).

Der zweite Teil sei der kleine Ast. Wegen dem Längenverkürzungsfaktor $\frac{a}{c}$ hat er den Flächeninhalt $x\frac{a^2}{c^2}$.

Der dritte Teil sei der große Ast. Er hat den Flächeninhalt $x\frac{b^2}{c^2}$.

Die drei Teile haben zusammen den Flächeninhalt x. Also ist:

$$c^2 + \frac{ab}{2} + x\frac{a^2}{c^2} + x\frac{b^2}{c^2} = x \tag{1}$$

Daraus erhalten wir:

$$c^2 + \frac{ab}{2} + x\underbrace{\frac{a^2+b^2}{c^2}}_{=1} = x \tag{2}$$

Und schließlich nach Subtraktion von x:

$$c^2 + \frac{ab}{2} = 0 \tag{3}$$

Das kann's nicht sein. Wo ist der Fehler?

3 Bearbeitung

Die beiden Stämme der beiden Äste (Quadrate der ersten Tochtergeneration) sind zusammen flächengleich zum Stamm (Quadrat) der Gesamtfigur. Ebenso sind die beiden grünen rechtwinkligen Dreiecke der ersten Tochtergeneration zusammen flächengleich dem großen grünen rechtwinkligen Dreieck.

Iteration dieses Gedankengangs auf nachfolgende Tochtergenerationen zeigt, dass die Gesamtfläche x linear mit der Anzahl der Generationen wächst und damit divergiert.

Der Schritt von Gleichung (2) zu Gleichung (3) ist daher nicht zulässig.

4 Es kann durchaus richtig sein

Die oben geschilderte Methode zur Flächenberechnung kann durchaus funktionieren.

In der Figur der Abbildung 2 ist der linke Ast längenmäßig halb so groß wie die Gesamtfigur, der rechte Ast längenmäßig ein Viertel so groß wie die Gesamtfigur.

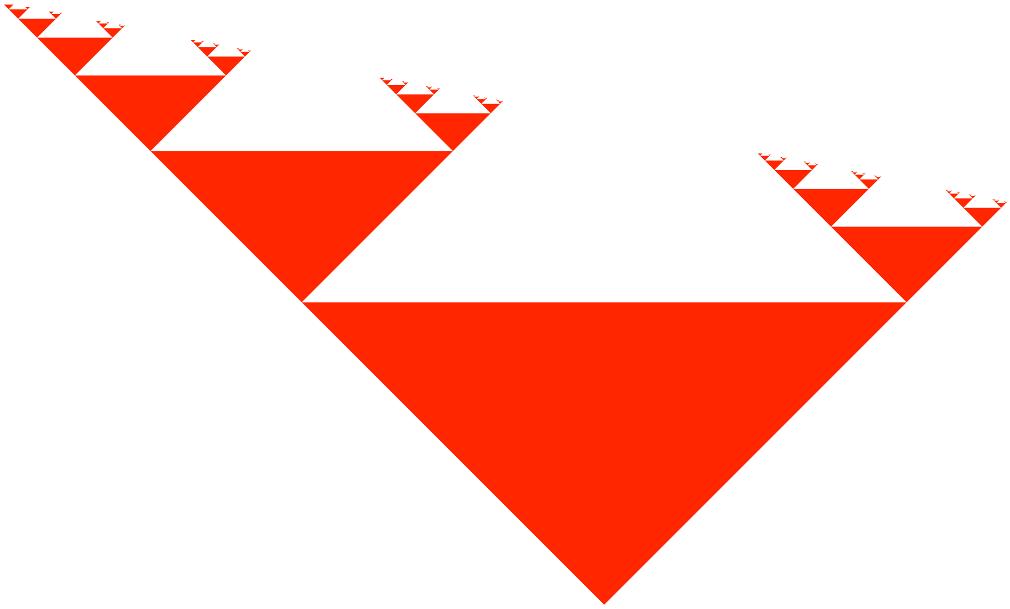

Abb. 2: Zwei Äste

Für die Berechnung des Flächeninhaltes x zerlegen wir wieder in drei Teile: Das Startdreieck mit dem Flächeninhalt d, den linken Ast mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{4}x$ und den rechten Ast mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{16}x$. Dadurch erhalten wir:

$$x = d + \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}x \tag{4}$$

Diese Gleichung können wir problemlos nach x auflösen. Es wird:

$$x = \frac{16}{11}d \tag{5}$$