Hans Walser, [20130822]

Winkelmessung

Anregung: Chr. D. und A. K.

1 Worum es geht

Für die Winkelmessung wird in der Schule das Gradmaß (Degree), in der Praxis das Bogenmaß (Radian) und in der Vermessung das gon (Grad) verwendet.

Die Frage ist, was es mit dem Winkel von 1° beziehungsweise 1gon auf sich hat.

2 Problem der Einheit

Es ist denkbar (ich kann das aber nicht belegen), dass bei den Babyloniern die Einheit für die Winkelmessung der Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck war (Abb. 1).

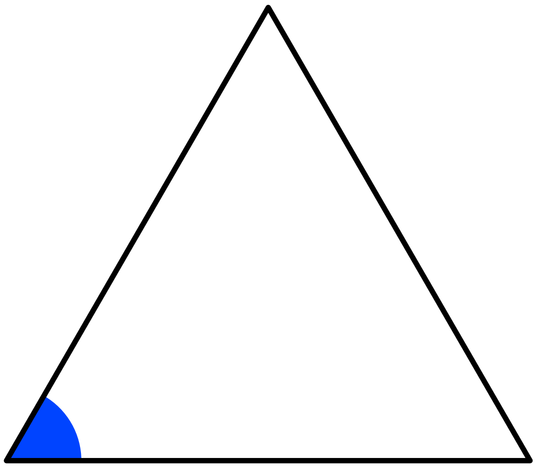

Abb. 1: Winkeleinheit

Das gleichseitige Dreieck ist ja die einfachste Figur, die mit Zirkel und Lineal, insbesondere auch mit dem Zirkel allein, konstruiert werden kann. Da die Babylonier ein Zahlensystem auf der Basis 60 verwendeten, ist die Winkelgröße 1° die erste Unterteilung der Winkeleinheit. Nachfolgenden Unterteilungen sind Minuten und Sekunden.

Wenn wir heute sagen, der Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck messe 60°, ist das ebenso absurd wie wenn der Euro als Geldwert von 100 Cent definiert würde. In der Schweiz gibt es allerdings das Sprichwort: Wer den Rappen nicht ehrt, ist des Franken nicht wert.

3 Zwei Welten

Euklid verwendet als Winkeleinheit den rechten Winkel.

Es gibt offenbar in der geometrischen Tradition zwei Richtungen, zwei „Welten“ sozusagen.

3.1 Kreisdenken

Stichworte: Kreisgeometrie, gleichseitiges Dreieck, sphärische Geometrie, Unterteilung in °, Dreiecksraster, Hexagonalraster, $\sqrt{3}$, platonische Körper mit Ausnahme des Würfels, himmlisches Denken. Babylon.

3.2 Orthogonales Denken

Das orthogonale Denken basiert auf dem rechten Winkel (Abb. 2).

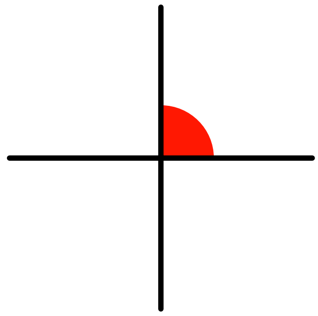

Abb. 2: Winkeleinheit

Stichworte: Euklid, Faltgeometrie, Unterteilung in gon, rechtwinkliges Dreieck, Pythagoras, Bauwesen (Aber erst musst du mir selber gebaut sein, rechtwinklig an Leib und Seele. Nietzsche, *Zarathustra*), Quadratraster, kartesisches Koordinatensystem, $\sqrt{2}$, Würfel, irdisches Denken. Ägypten und Griechenland.

Didaktisches: Das orthogonale Denken ist derart verinnerlicht, dass offensichtlich falsche Figuren „richtig“, das heißt in der Intention des Zeichners, gedeutet werden. Es findet eine Orthogonalisierung im Kopf statt.

Die Figur der Abbildung 3a wird als Würfel interpretiert, obwohl ein Würfel nicht annähernd so gesehen werden kann. Diese Technik des *Schrägbildes* ist in der Schule leider weit verbreitet. Die in der gleichen Technik des Schrägbildes eingezeichnete Innenkugel des Würfels (Abb. 3b) wirkt verzerrt und kann nicht mehr so einfach im Kopf zurechtgebogen werden. Der Umriss der Kugel erscheint als Ellipse, was sehr unnatürlich wirkt.

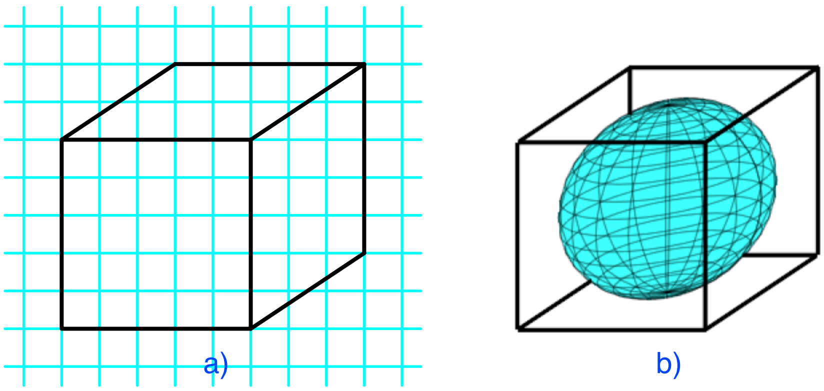

Abb. 3: Würfel im Schrägbild

Die Abbildung 4 zeigt, wie man es besser machen könnte (Abbildung 4a basierend auf *LEGO®* CITY, Bauanleitung 3178_1, S. 5). Es handelt sich um eine so genannte *Normalaxonometrie*. Hier sind allerdings nun gar keine rechten Winkel sichtbar, wir sind ebenfalls auf die Orthogonalisierung im Kopf angewiesen. Dafür ist die Innenkugel des Würfels schön rund (Abb. 4b).

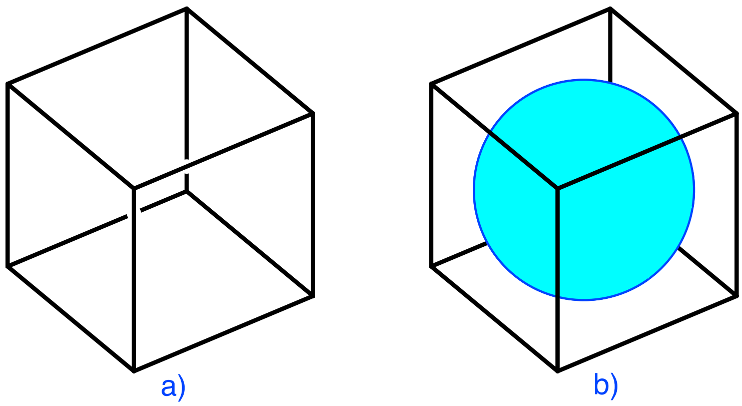

Abb. 4: Würfel in orthografischer Darstellung (Normalaxonometrie)

4 Alltag, Wissenschaft und Vermessung

Die Winkelunterteilung mit 360° für den Vollwinkel wird in der Schule und für die Schule unterrichtet. Sie hat daher im umgangssprachlichen Alltag eine gewisse Bedeutung.

Die Wissenschaft arbeitet mit dem Bogenmaß, die Vermessung mit der Unterteilung des Vollwinkels in 400gon.

Gelegentlich findet man noch andere Maße, etwa die Unterteilung des Vollwinkels in 32 oder 64 oder 6400 Teile (Kompassrose mit Stricheinteilung). Wegen $6400 \approx 1000 \cdot 2\pi$ haben wir damit eine grobe Approximation an das Bogenmaß.

5 Konstruierbarkeit

5.1 Grad

Der Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck ist mit Zirkel (und Lineal) sehr einfach konstruierbar, aber der Winkel von 1° ist mit Zirkel und Lineal *nicht* konstruierbar. Mit 1° wäre auch 40° konstruierbar und damit das regelmäßige Neuneck.

Ein Winkel von 3° ist auf verschiedene Weisen konstruierbar. Man kann etwa zu 60° einen Viertel davon addieren, hat dann also 75°, und davon den Zentriwinkel 72° des regelmäßigen Fünfeckes subtrahieren.

Damit sind auch alle Vielfachen von 3° konstruierbar. Hingegen ist ein Winkel von $n \cdot 3° \pm 1°, n \in \mathbb{Z}$, nicht konstruierbar, weil man sonst durch Differenzbildung einen Winkel von 1° konstruieren könnte.

Bei den Winkeln mit ganzzahligem Gradmaß sind also genau die Winkel von der Form $n \cdot 3°, n \in \mathbb{Z}$, konstruierbar.

5.2 Gon

Der rechte Winkel ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar, aber der Winkel von 1gon ist mit Zirkel und Lineal *nicht* konstruierbar. Mit 1gon wäre auch 16gon konstruierbar und damit das regelmäßige 25-Eck.

Damit ist auch ein Winkel von 2gon nicht konstruierbar.

Einen Winkel von 5gon erhalten wir durch mehrfaches Halbieren des Zentriwinkels 80gon des regelmäßigen Fünfeckes.

Damit sind auch alle Vielfachen von 5gon konstruierbar. Hingegen sind Winkel von der Form $n \cdot 5\text{gon} \pm 1\text{gon}, n \in \mathbb{Z}$, oder $n \cdot 5\text{gon} \pm 2\text{gon}, n \in \mathbb{Z}$, nicht konstruierbar, weil man sonst durch Differenzbildung Winkel von 1gon oder 2gon konstruieren könnte.

Unter den Winkeln mit ganzzahligem gon-Maß sind also genau die Winkel von der Form $n \cdot 5\text{gon}, n \in \mathbb{Z}$, konstruierbar.