Hans Walser, [20080315a]

Winkeldrittelung

Anregung: Chr. W., B.

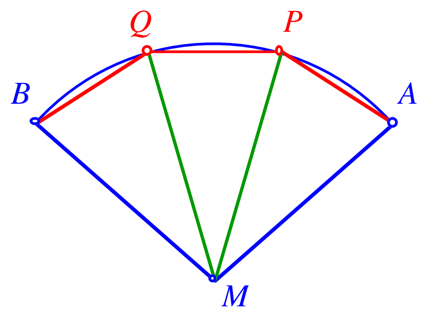
1 Worum es geht

Die Winkeldrittelung ist — zusammen mit der Würfelverdoppelung und der Quadratur des Kreises — eines der drei klassischen Probleme, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind.

Hingegen lässt sich das Problem mit Schnittpunkten von Kegelschnitten angehen. Wir müssen einen Kreis mit einer Hyperbel schneiden.

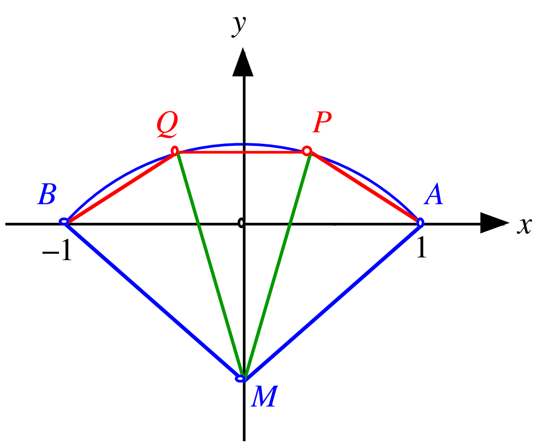
2 Disposition

Das Problem der Winkeldrittelung ist äquivalent mit dem Problem, einen Kreisbogen in drei gleiche Teile zu teilen, oder dem Kreisbogen einen gleichseitigen Polygonzug mit drei Seiten einzubeschreiben.



Winkeldrittelung

Wir verwenden ein Koordinatensystem so, dass die Endpunkte A und B die Koordinaten $A(1,0)$ beziehungsweise $B(-1,0)$ haben.



Disposition

3 Die Hyperbel

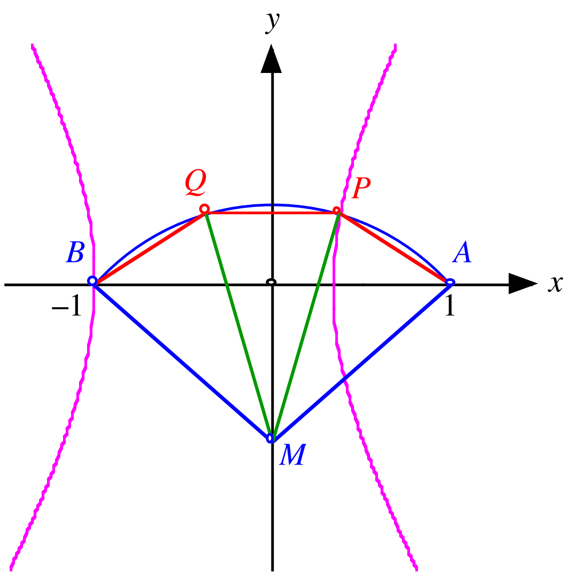
In diesem Koordinatensystem ist der Punkt P von der y-Achse halb so weit entfernt wie vom Punkt A. Für seine Koordinaten $P(x,y)$ gilt daher:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Durch Quadrieren erhalten wir $4x^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$, also:

$$3x^2 + 2x - y^2 = 1$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel. Der Drittelspunkt P ist also der Schnittpunkt des Winkelbogens AB mit dieser Hyperbel.



Schnitt mit Hyperbel

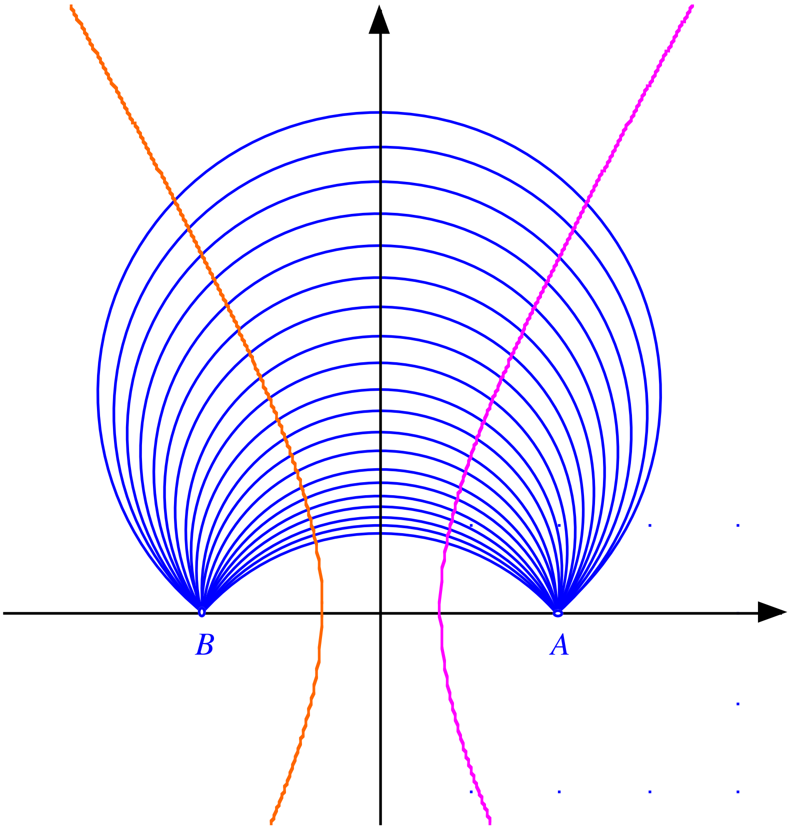
Interessant ist dabei, dass der zweite Hyperbelast nicht, wie ich zuerst erwartet habe, durch den zweiten Drittelspunkt Q verläuft, sondern durch den Endpunkt B des Winkelbogens. Zur Konstruktion des Punktes Q müssen wir den Punkt P an der y-Achse spiegeln.

Die Hyperbelgleichung $3x^2 + 2x - y^2 = 1$ lässt sich umformen in die Standardform:

$$\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2} = 1$$

Die Hyperbel hat also den Mittelpunkt $N\left(-\frac{1}{3},0\right)$, und mit den bei Kegelschnitten üblichen Bezeichnungen ist $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Die Brennpunkte sind $F_1(1,0) = A$ und $F_2\left(-\frac{5}{3},0\right)$. Die beiden Asymptoten haben die Gleichungen $y = \pm\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

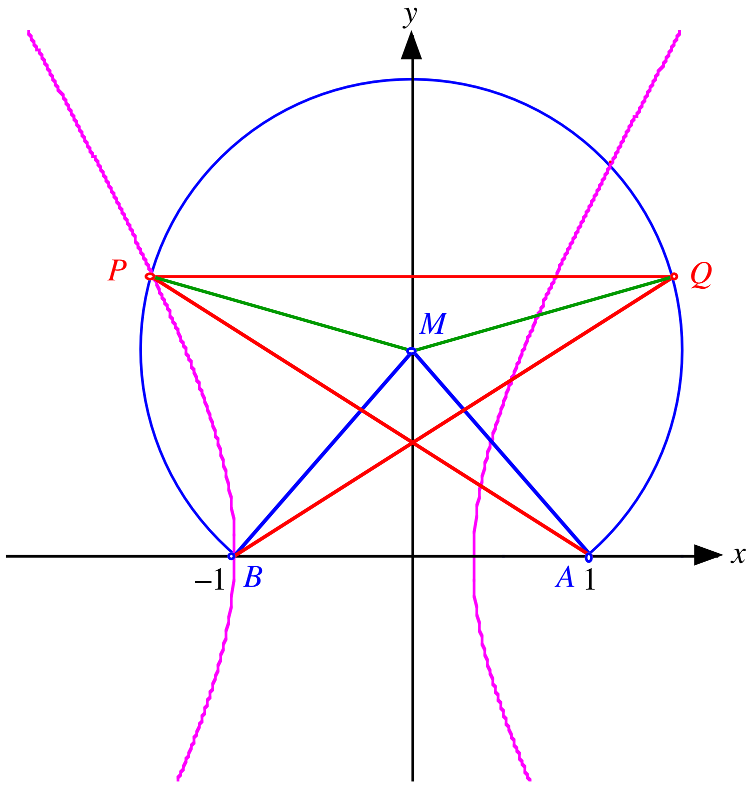
Mittelpunkt und Radius des Kreisbogens sind für die Hyperbel irrelevant; der rechte Hyperbelast und sein Spiegelbild dritteln jeden Kreisbogen mit den Endpunkten A und B. Insbesondere wird auch die Strecke $\overline{AB}$ gedrittelt.



Jeder Kreisbogen wird gedrittelt

4 Der zweite Hyperbelast

Und wozu ist der zweite Hyperbelast gut? Das sehen wir im folgenden Bild:



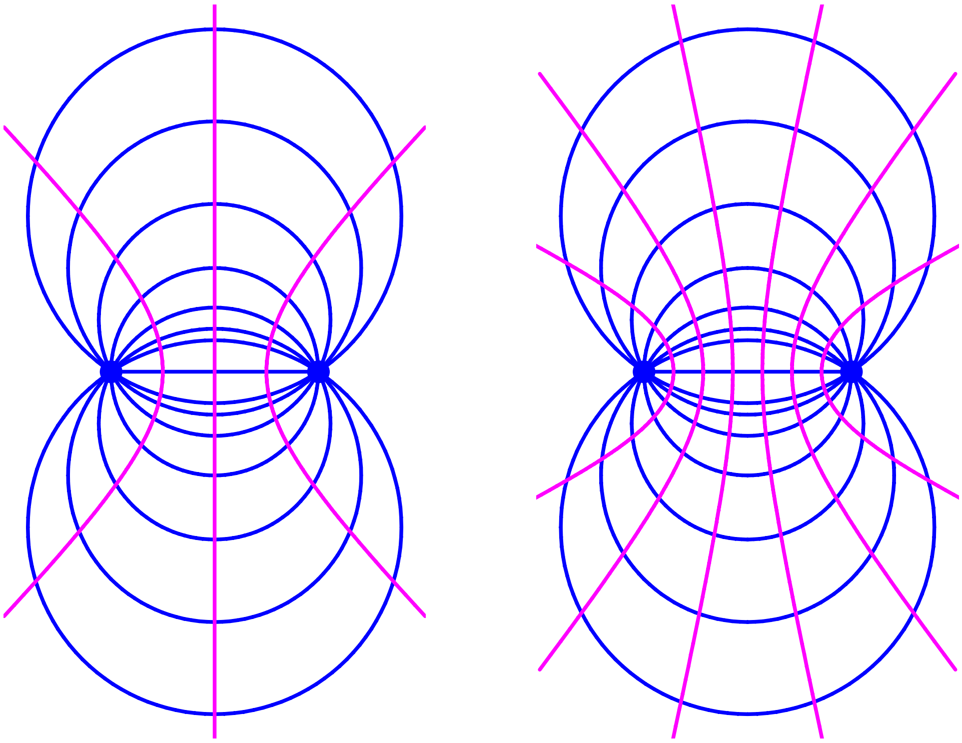
„Überschlagener" Polygonzug

Der gleichseitige Polygonzug *APQB* ist nun „überschlagen". Für die Winkel gilt:

$$\sphericalangle AMP = \sphericalangle PMQ = \sphericalangle QMB = \tfrac{1}{3}\left(\sphericalangle AMB + 2\pi\right)$$

5 Ausblick

Die folgenden Figuren zeigen die Situation bei Viertelung und Siebtelung der Kreisbögen.



Teilungen durch 4 und durch 7

Die Kurven sehen zwar wie Hyperbeln aus, sind aber im Allgemeinen keine.