Hans Walser, [20161001]

Vierkreisepunkt

Anregung: G. Sch., G.

1 Der Schnittpunkt

Bei vier Geraden in allgemeiner Lage gibt es $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten, drei Geraden auszuwählen und damit ein Dreieck zu bilden.

Die Umkreise dieser vier Dreiecke schneiden sich in einem Punkt (Abb. 1).

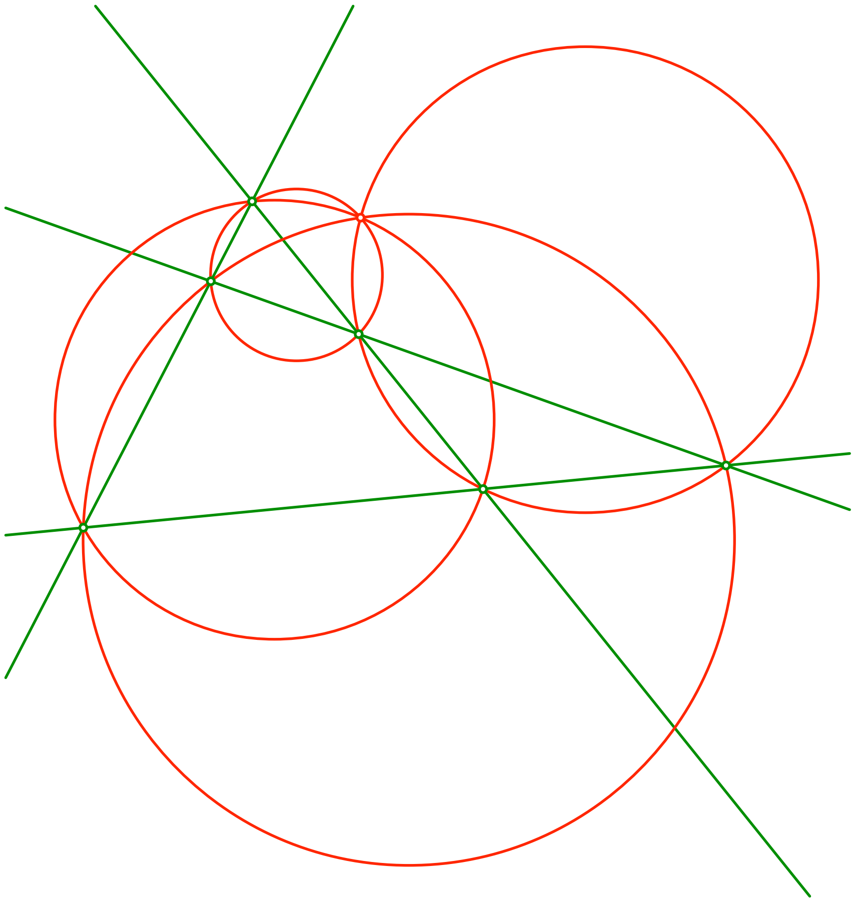

Abb. 1: Schnittpunkt von vier Kreisen

2 Beweis

2.1 Bezeichnungen

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 2.

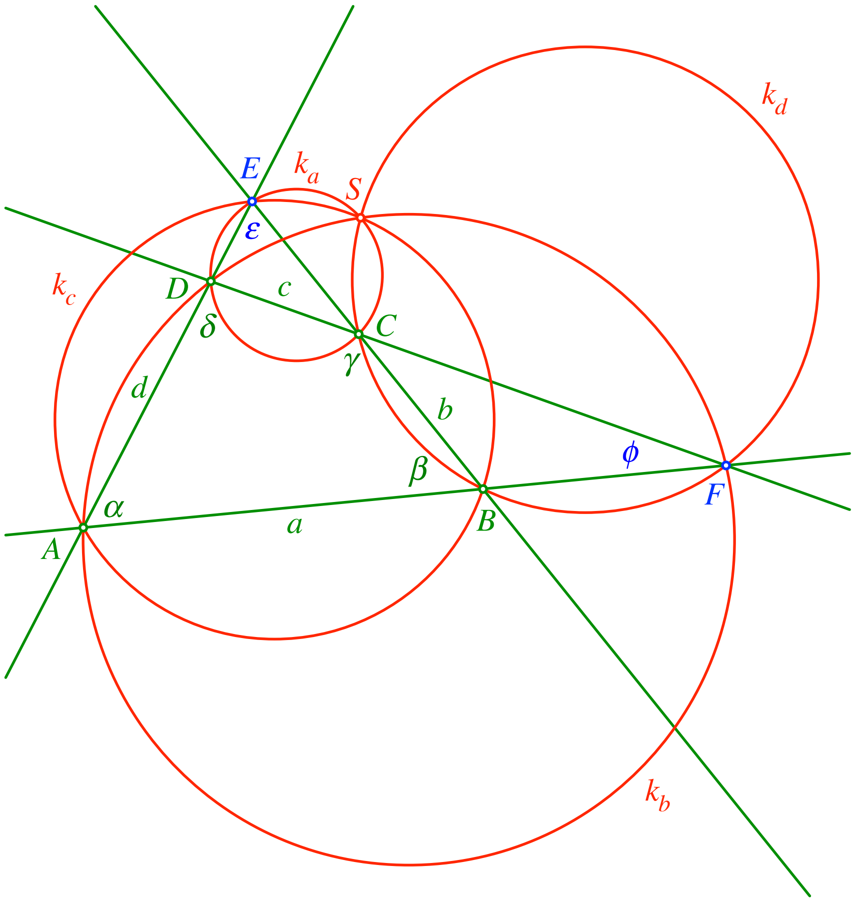

Abb. 2: Bezeichnungen

Es gelten folgende Winkelbeziehungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \pi - \alpha - \beta = \gamma + \delta - \pi \\ \phi &= \pi - \delta - \alpha = \beta + \gamma - \pi \end{aligned} \tag{1}$$

Zunächst sei S der Schnittpunkt der beiden Kreise k_a und k_b. Wir haben zu zeigen, dass auch die Kreise k_c und k_d durch S verlaufen.

2.2 k_c verläuft durch S

Wir überlegen anhand der Abbildung 3.

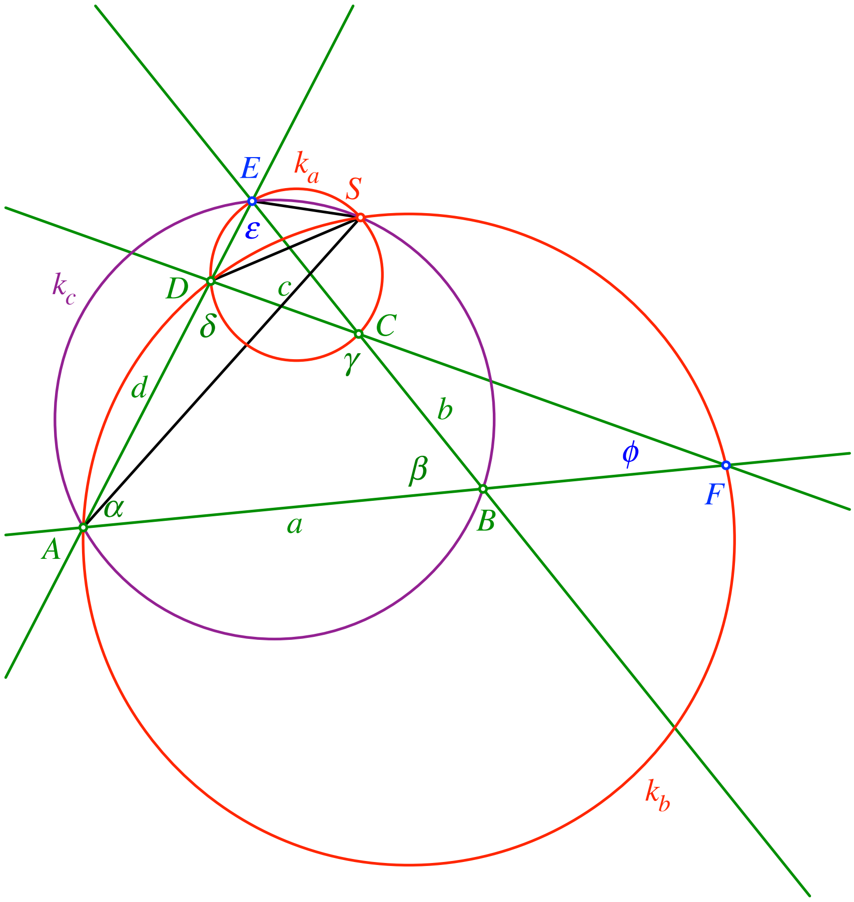

Abb. 3: Überlegung für den Kreis k_c

Wir verwenden die Kreise k_a und k_b als Ortsbogen für Peripheriewinkel. Es ist:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ESD &= \pi - \gamma \\ \sphericalangle DSA &= \phi \end{aligned} \tag{2}$$

Daraus erhalten wir unter Verwendung von (1):

$$\sphericalangle ESA = \pi - \gamma + \phi = \pi - \gamma + \beta + \gamma - \pi = \beta \tag{3}$$

Damit liegt S auf dem Kreis k_c.

2.3 k_d verläuft durch S

Das ist jetzt aus logischen Symmetriegründen klar.

Wir können aber auch direkt überlegen (Abb. 4).

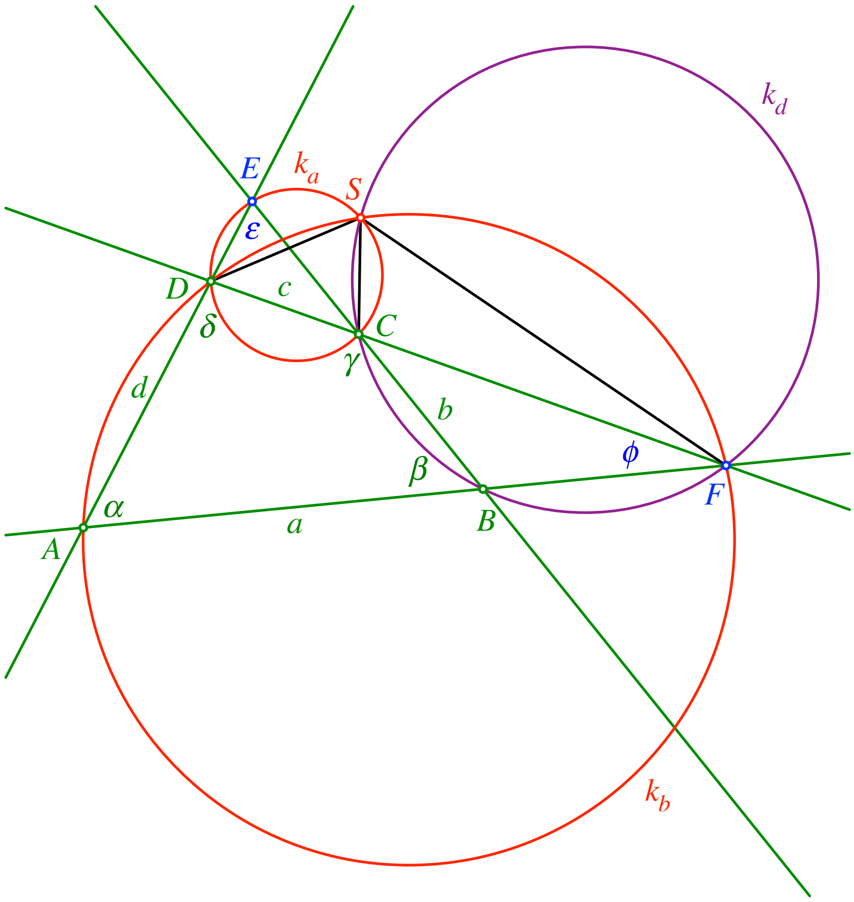

Abb. 4: Überlegung für den Kreis k_d

Es ist:

$$\begin{aligned} \sphericalangle DSC &= \varepsilon \\ \sphericalangle DSF &= \pi - \alpha \end{aligned} \tag{4}$$

Daraus erhalten wir unter Verwendung von (1):

$$\sphericalangle CSF = \pi - \alpha - \varepsilon = \pi - \alpha - (\pi - \alpha - \beta) = \beta \tag{5}$$

Damit liegt S auf dem Kreis k_d.

3 Fünfpunktekreis

In der Figur der Abbildung 1 zeichnen wir noch die Mittelpunkte der vier roten Umkreise ein. Diese liegen zusammen mit dem Schnittpunkt auf einem Kreis (Abb. 5).

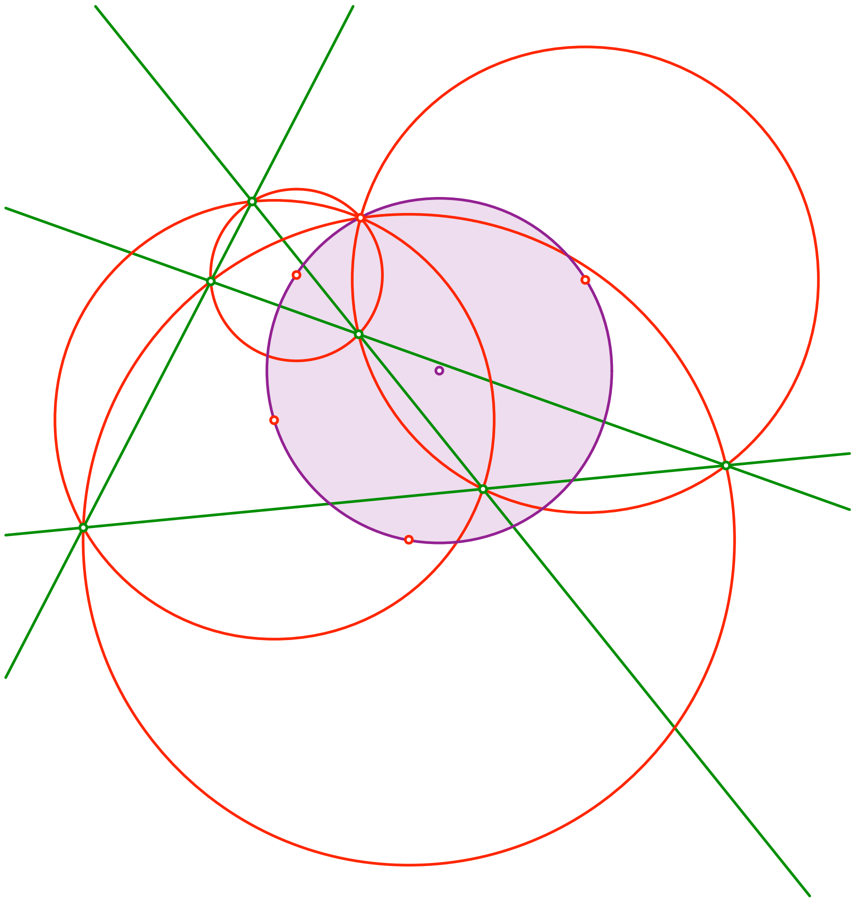

Abb. 5: Fünfpunktekreis

Für den Beweis benötigen wir den Satz von Wallace (Walser, Schlussgerade).

Website

Hans Walser: Schlussgerade (01.10.2016)
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Schlussgerade/Schlussgerade.htm