Hans Walser, [20150119]

Verallgemeinerung des Vektorprodukts

Anregung: G. G., B.

1 Worum geht es?

In der Schule lernt man, dass das Vektorprodukt nur für Raumvektoren funktioniert. Das ist eine falsche Sicht.

2 Formale Determinanten

2.1 Im Raum

Wir konstruieren zu zwei Raumvektoren

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

die formale Matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \vec{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \vec{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

Die Einträge in den ersten beiden Spalten von A sind die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die Einträge in der dritten Spalte sind keine Zahlen, sondern die drei Einheitsvektoren eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems.

Für die formale Determinante erhalten wir mit der Entwicklung nach Laplace nach der dritten Spalte:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \vec{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \vec{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \vec{e}_3 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \vec{e}_1 \det\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}\right) - \vec{e}_2 \det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}\right) + \vec{e}_3 \det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}
\end{aligned}$$

Diese formale Determinante ist ein Vektor, und zwar das Vektorprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

2.2 In der Ebene

In der Ebene konstruieren wir analog zu einem Vektor

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

die formale Matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \vec{e}_1 \\ a_2 & \vec{e}_2 \end{bmatrix}$$

Die Einträge in der ersten Spalte von A sind die Komponenten des Vektors $\vec{a}$, die Einträge in der zweiten Spalte sind keine Zahlen, sondern die beiden Einheitsvektoren eines ebenen kartesischen Koordinatensystems. Nun berechnen wir formal die Determinante dieser Matrix A:

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_1 & \vec{e}_1 \\ a_2 & \vec{e}_2 \end{bmatrix}\right) = a_1\vec{e}_2 - a_2\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \vec{a}^{\perp}$$

Diese Determinante ist ein Vektor, und zwar der um +90° gedrehte Vektor $\vec{a}$.

3 Allgemein

Wir verallgemeinern in beliebige Dimensionen n. Zu $n-1$ Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{a}_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

bilden wir die formale Matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & \vec{e}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & \vec{e}_n \end{bmatrix}$$

Nun berechnen wir formal die Determinante:

$$\times(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1}) \quad \mapsto \quad \det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & \vec{e}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & \vec{e}_n \end{bmatrix}\right)$$

Die Schreibweise $\times(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1})$, gesprochen „cross(...)“, ist an die Schreibweise des Vektorproduktes angelehnt.

Die Determinante $\times(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1})$ ist ein Vektor mit folgenden Eigenschaften:

- Er ist orthogonal zu jedem der $n-1$ Inputvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}$.
- Seine Länge hat bis auf das Vorzeichen dieselbe Maßzahl wie das $n-1$-dimensionale Volumen des durch $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}$ aufgespannten Spates.

- Die Zuordnung $\times(\vec{a}_1,...,\vec{a}_{n-1})$ ist antikommutativ. Vertauschen zweier Inputvektoren stellt die Richtung um.

4 Beweise

Für die Beweise verwenden wir die Bezeichnung:

$$\vec{v} = \times(\vec{a}_1,...,\vec{a}_{n-1})$$

Zu einer quadratischen Matrix B bezeichnen wir mit $\tilde{B}_{i,j}$ die Determinante der Untermatrix, die sich aus B durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte ergibt.
Auf Grund der Berechnung einer Determinante nach der Entwicklung der letzten Spalte ist daher:

$$\vec{v} = \times(\vec{a}_1,...,\vec{a}_{n-1}) = \begin{bmatrix} (-1)^{n-1+1}\tilde{A}_{1,n} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1+j}\tilde{A}_{j,n} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1+n}\tilde{A}_{n,n} \end{bmatrix}$$

4.1 Orthogonalität

Wir ersetzen in der Matrix A die letzte Spalte, also die Spalte mit den Einheitsvektoren, durch die Komponenten eines Vektors $\vec{a}_k$, $k \in \{1,\ldots,n-1\}$:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,k} \end{bmatrix}$$

Weil der Spaltenvektor $\vec{a}_k$ nun doppelt vorkommt, ist $\det(\hat{A}) = 0$. Andererseits liefert die Entwicklung nach der letzten Spalte:

$$0 = \det(\hat{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}(-1)^{n-1+j}\tilde{A}_{j,n} = \vec{a}_k \cdot \vec{v}$$

Der Vektor $\vec{v} = \times(\vec{a}_1,...,\vec{a}_{n-1})$ ist also orthogonal zu jedem der $n-1$ Inputvektoren $\vec{a}_k$.

4.2 Länge

Für die Länge des Vektors $\vec{v}$ gilt zunächst (die Vorzeichen verschwinden durch das Quadrieren):

$$|\vec{v}|^2 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{j,n}^2$$

Nun ersetzen wir in der Matrix A die letzte Spalte, also die Spalte mit den Einheitsvektoren, durch die Komponenten eines Vektors $\vec{v}$:

$$\breve{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & (-1)^{n-1+1}\,\tilde{A}_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n-1} & (-1)^{n-1+j}\,\tilde{A}_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & (-1)^{n-1+n}\,\tilde{A}_{n,n} \end{bmatrix}$$

Die Determinante der Matrix $\breve{A}$ ist also das n-dimensionale Volumen des durch die n Vektoren $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1},\vec{v}$ aufgespannten Spates. Wegen der im vorangehenden Abschnitt festgestellten Orthogonalität ist dieser Spat aber ein gerades Prisma mit dem durch die $n-1$ Vektoren $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1}$ aufgespannten $n-1$-dimensionalen Spat als Grundfigur. Das $n-1$-dimensionale Volumen dieses Spates bezeichnen wir mit G, in Anlehnung an die Grundfläche im räumlichen Fall. Es gilt also unter Berücksichtigung allfälliger Vorzeichen:

$$\det\left(\breve{A}\right) = \pm G|\vec{v}|$$

Andererseits ist (Entwicklung nach der letzten Spalte):

$$\det\left(\breve{A}\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-1+j}\,\tilde{A}_{j,n}\,(-1)^{n-1+j}\,\tilde{A}_{j,n} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{j,n}^2 = |\vec{v}|^2$$

Somit ist $|\vec{v}| = \pm G$.

4.3 Antikommutativität

Die Antikommutativität ist eine Folge der Vorzeichenänderung beim Vertauschen zweier Spalten in einer Determinantenberechnung.