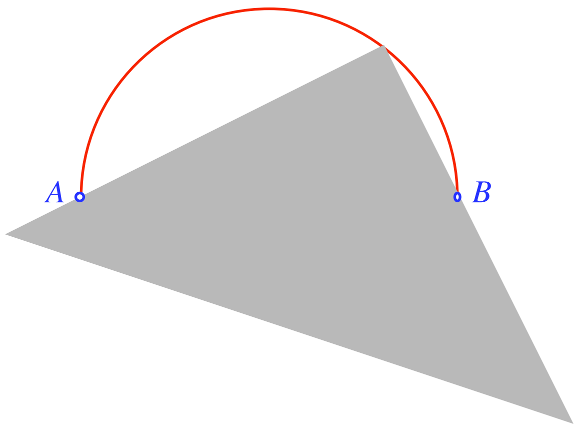
Hans Walser, [20070330a]

Verallgemeinerung des Thaleskreises

1 Hands on Geometry

Wir schlagen in den Punkten A und B je einen Nagel ein so dass der Nagelhals noch vorsteht und schieben ein Geo-Dreieck ein. Wenn wir das Geo-Dreieck bewegen, beschreibt die Ecke mit dem rechten Winkel den Thaleskreis über der Strecke AB.

Der Thaleskreis kann wie folgt sichtbar gemacht werden: wir bestreuen die Ebene (also das Brett, in welchem die beiden Nägel stecken) leicht mit Sand und schieben den Sand mit dem Geo-Dreieck (mit Vorteil eines aus Holz, das eine gewisse Dicke aufweist) zur Seite.



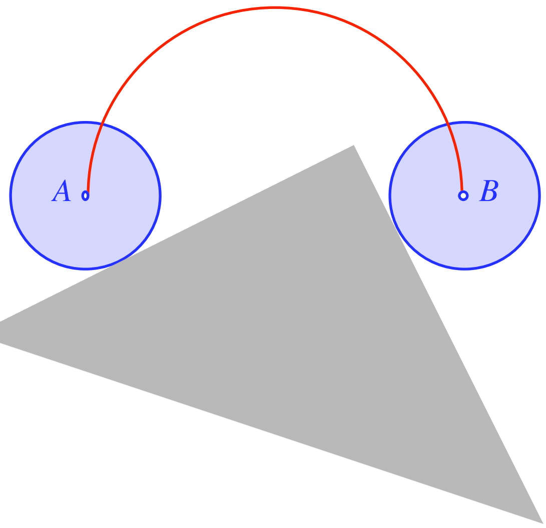
Genesis des Thaleskreises

Frage 1: Was für eine Kurve beschreiben die beiden anderen Ecken des Geodreieckes?

Bei unserer Konstruktion gehen wir von „idealen" Nägeln der Dicke Null aus. Wie aber, wenn die Nägel einen realen Durchmesser $2r$ haben?

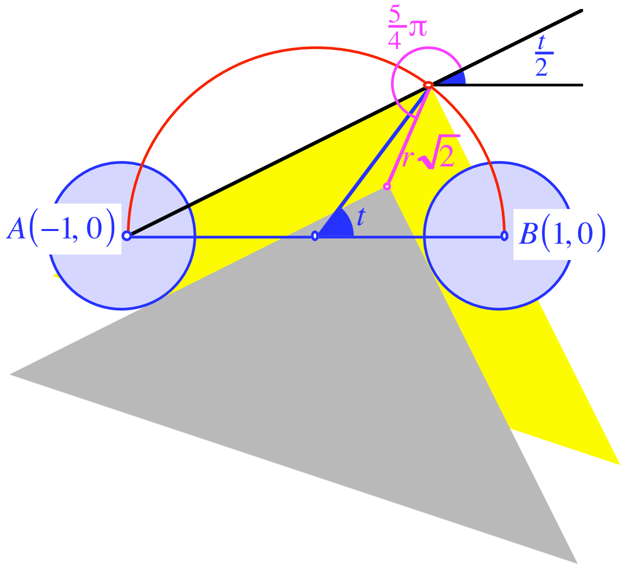
2 Echte Nägel

Bei echten Nägeln kommen wir mit dem Geo-Dreieck nicht mehr bis zum Thaleskreis.



Das Unzulängliche, hier wird's Ereignis

Was für eine Kurve beschreibt die Ecke des Geo-Dreieckes in diesem Fall?.
Zur Auffindung der Parameterdarstellung mag folgende Figur hilfreich sein:

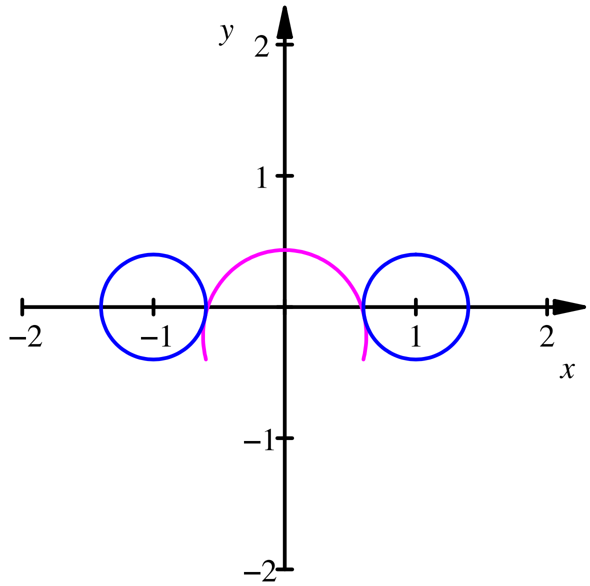


Figur zum Nachdenken

Für die Kurve, welche die Ecke beim rechten Winkel des Geo-Dreieckes beschreibt, ergibt sich die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t)+r\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{5}{4}\pi\right)\\ \sin(t)+r\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{5}{4}\pi\right)\end{bmatrix},\quad t\in[0,\pi]$$

Für $r=0.4$ ergibt sich:



Der reale „Thaleskreis“

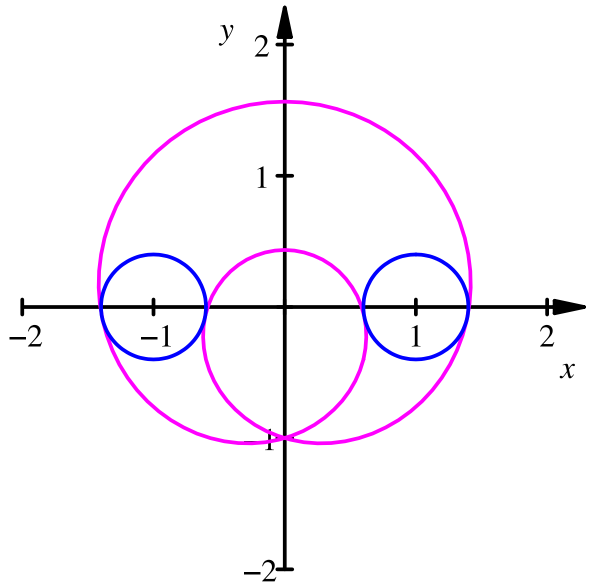
Das ist natürlich kein Kreis mehr, sondern eine Überlagerung von zwei Kreisbewegungen mit unterschiedlicher Drehfrequenz. Man nennt das eine Epizykloide.

Wir sehen allerdings in unserer Figur, dass wir die Parametergrenzen nicht genau gefunden haben. Daher:

Frage 2: Welches sind die sauberen Parametergrenzen?

Man kann sich auch fragen, was bei einer Ausweitung des Parameterbereiches geschieht.

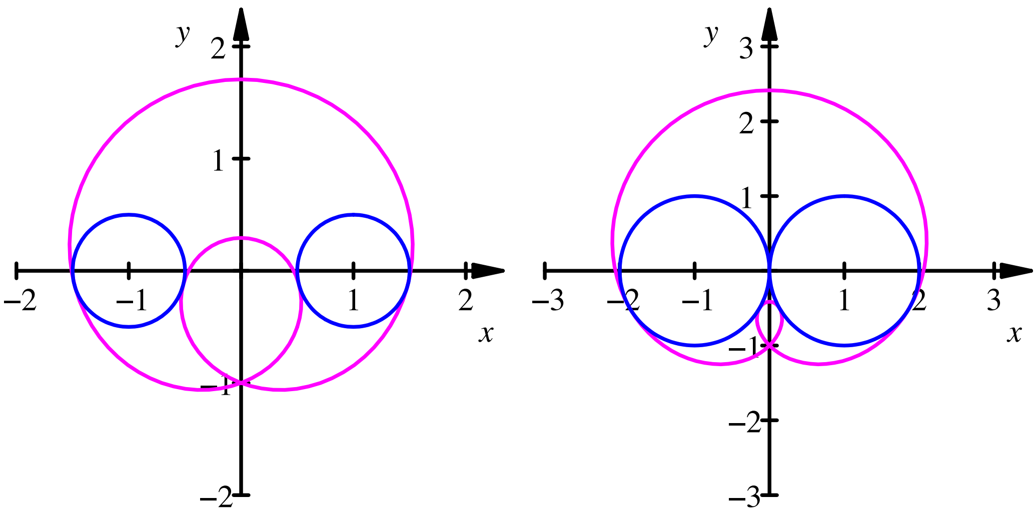
Die folgende Figur zeigt die Situation für $r = 0.4$ und $t \in [0, 4\pi]$:



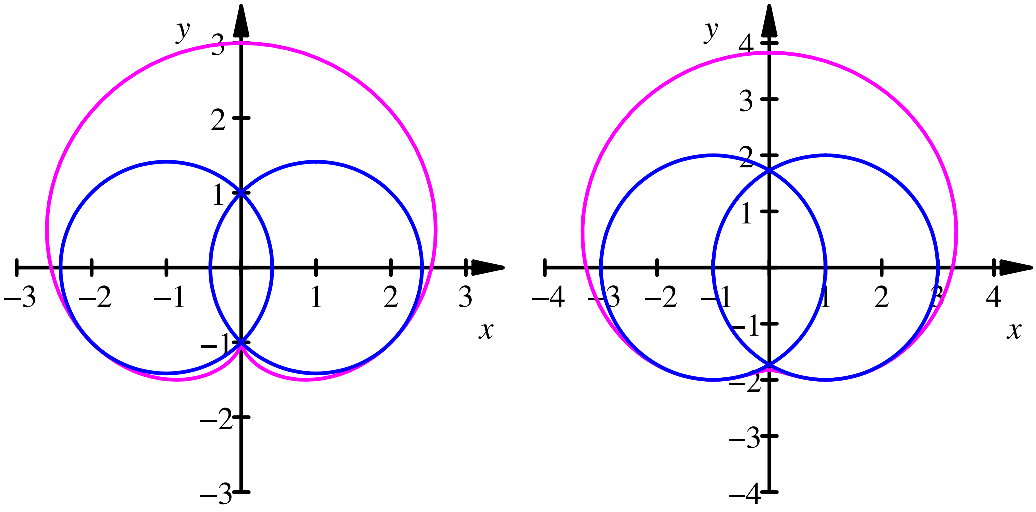
Erweiterter Parameterbereich

Wir erhalten eine Schlinge mit zwei Umläufen.

Und nun noch einige Bildchen mit verschiedenen Werten von r.



$r = 0.5$ und $r = 1$



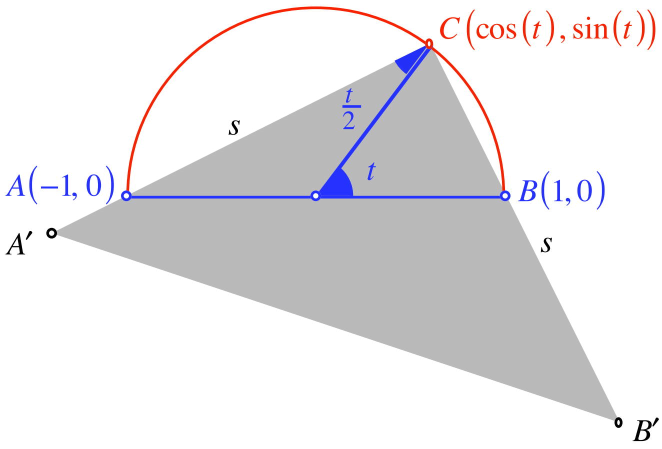
$r = \sqrt{2}$ und $r = 2$

3 Antworten zu den Fragen

3.1 Frage 1

Was für eine Kurve beschreiben die beiden anderen Ecken des Geodreieckes?

Wir geben den Punkten A und B die Koordinaten $A(-1,0)$ und $B(1,0)$. Das Geo-Dreieck habe die Ecken A', B', C mit dem rechten Winkel in C. Die Schenkellänge des Geo-Dreieckes sei s. Wir verwenden den Parameter t gemäß Figur.

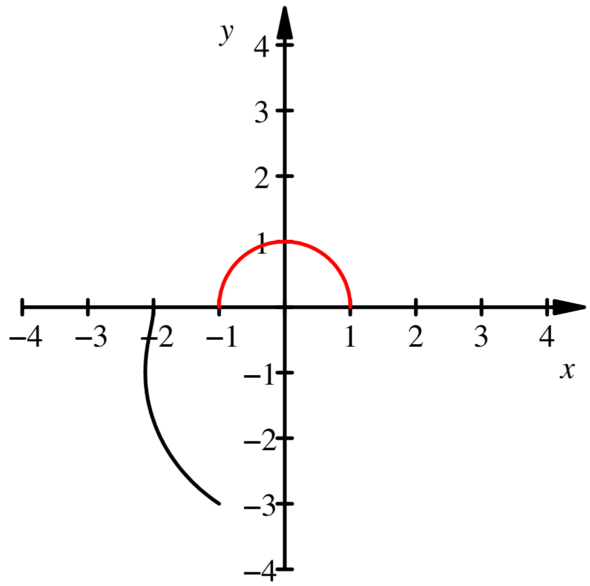


Wo spaziert die Ecke A'?

Für den Weg der Ecke A' erhalten wir die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}_{A'}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) - s\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin(t) - s\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$$

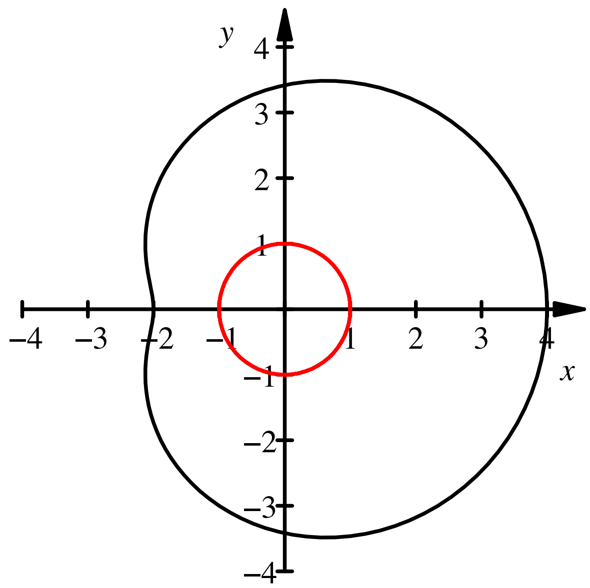
Für $s = 3$ ergibt sich die schwarze Kurve der folgenden Figur:



$s = 3$

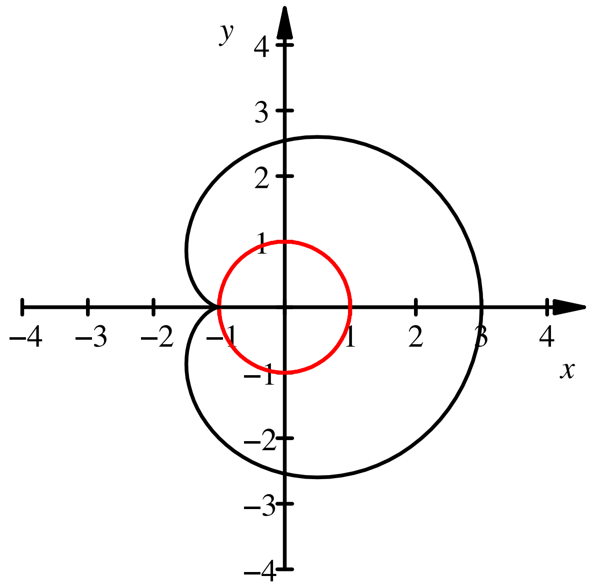
Sie ist etwas bescheiden, aber wenn man sich die Dynamik des Geo-Dreieckes vorstellt, stimmt es.

Für den erweiterten Parameterbereich $t \in [0, 4\pi]$ ergibt sich eine geschlossene Kurve. Mit dem Geo-Dreieck ist das allerdings nur noch virtuell möglich; die Katheten müssen über die Ecken hinaus verlängert werden.



Erweiterter Parameterbereich

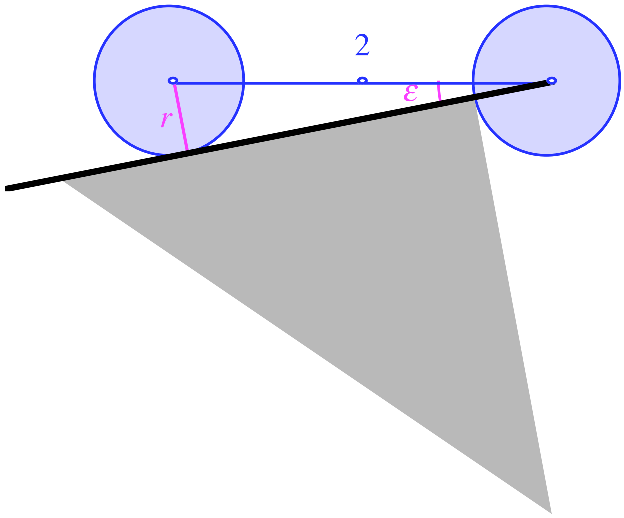
Für den Grenzfall $s = 2$ und den erweiterten Parameterbereich $t \in [0, 4\pi]$ erhalten wir die so genannte Kardioide oder Herzkurve. Sie ist eine spezielle Epizykloide (Abrollkurve).



Herzkurve

3.2 Frage 2

Welches sind die sauberen Parametergrenzen?
Die Figur zeigt die Startsituation:



Startsituation

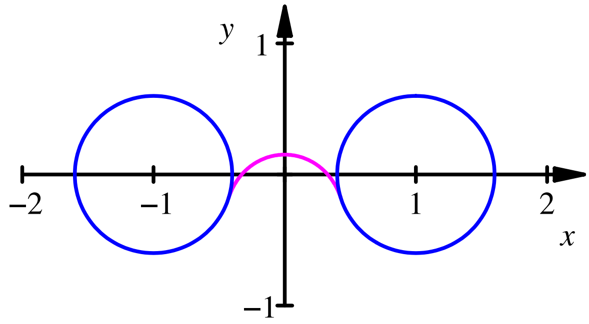
Der Startwinkel ist nicht Null, sondern $\varepsilon = \arcsin\left(\frac{r}{2}\right)$. In unserer Parametrisierung beschreibt $\frac{t}{2}$ die Orientierung des Geo-Dreieckes. Für den Startparameter $t_{\min}$ erhalten wir also:

$$\frac{t_{\min}}{2} = \varepsilon = \arcsin\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$t_{\min} = 2\arcsin\left(\frac{r}{2}\right)$$

Analoges gilt für die Endposition.

Somit erhalten wir die richtigen Intervallgrenzen: $t \in \left[2\arcsin\left(\frac{r}{2}\right), \pi - 2\arcsin\left(\frac{r}{2}\right)\right]$. Die folgenden Figur zeigt die Situation für $r = 0.6$:



Oma's Brille