

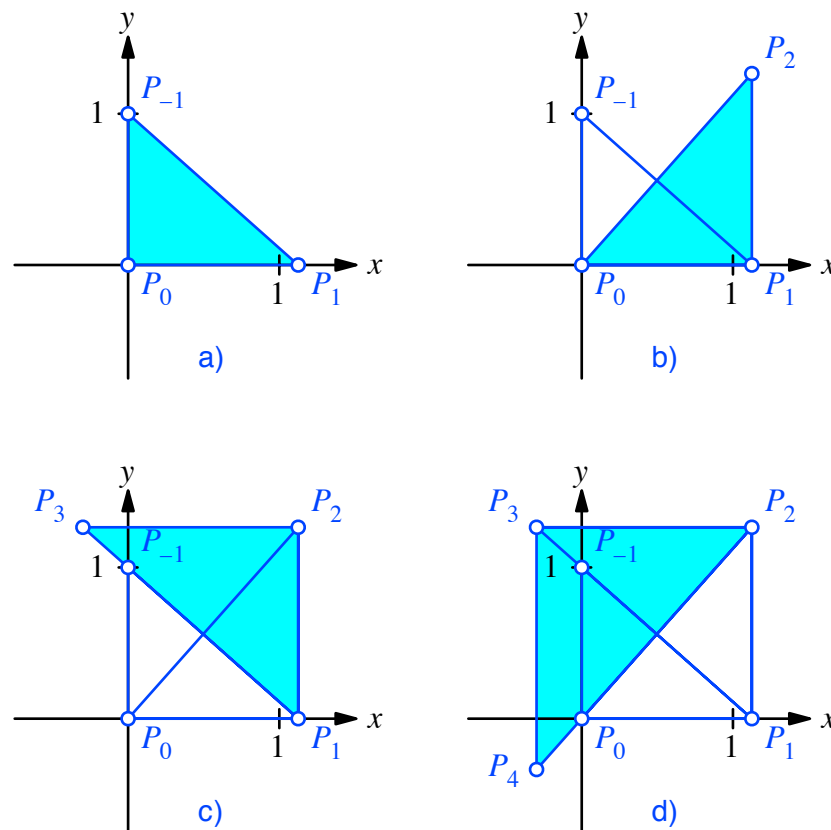
Hans Walser, [20140312]

## Verallgemeinerung der Parabel

Anregung: Wynands, 2014, S. 21, Aufgabe 2

### 1 Eine Folge von ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken

Im kartesischen Koordinatensystem zeichnen wir ein Dreieck mit den Ecken  $P_{-1}(0,1)$ ,  $P_0(0,0)$ ,  $P_1(t,0)$ . Wir haben einen offenen Parameter  $t$ . In der Abbildung 1a ist  $t = 1.125$  gewählt worden.

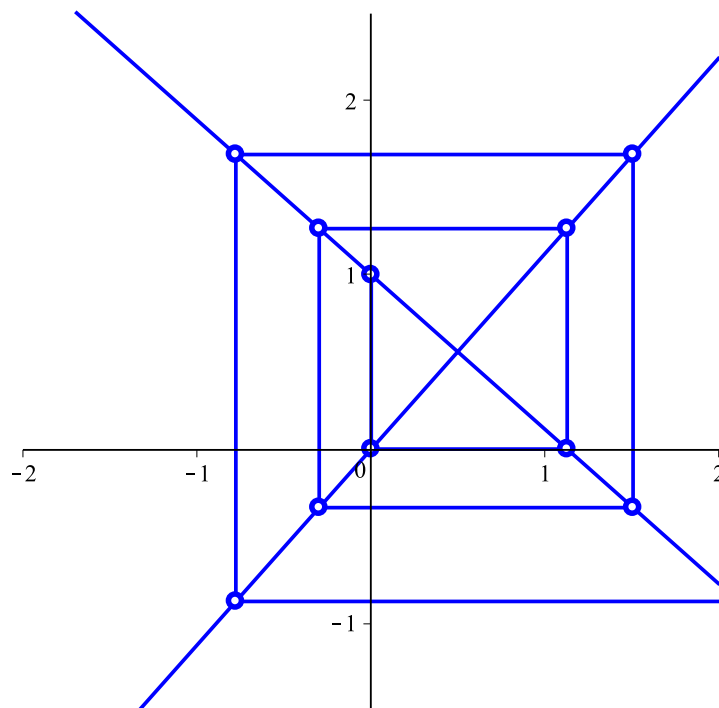


**Abb. 1: Ähnliche Dreiecke**

Weiter zeichnen wir ein zum Dreieck  $P_{-1}P_0P_1$  ähnliches Dreieck  $P_0P_1P_2$  (Abb. 1b). Wir iterieren den Prozess: zum Dreieck  $P_{n-2}P_{n-1}P_n$  zeichnen wir ein ähnliches Dreieck  $P_{n-1}P_nP_{n+1}$ . Die Abbildung 1 zeigt die ersten Schritte.

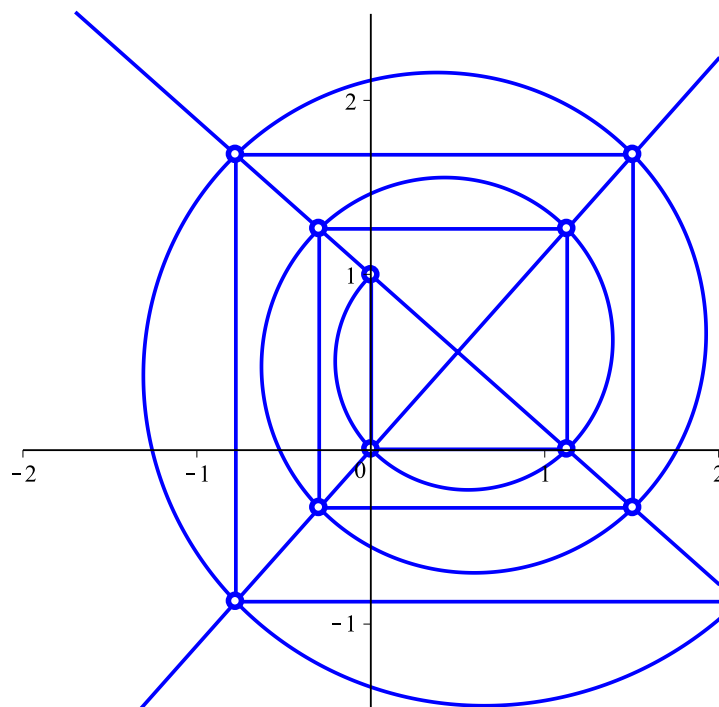
## 2 Spiralen

Es entsteht eine eckige logarithmische Spirale (Abb. 2).



**Abb. 2: Eckige Spirale**

Die Punkte  $P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots$  liegen aber auch auf einer runden logarithmischen Spirale (Abb. 3).



**Abb. 3: Logarithmische Spirale**

### 3 Parabel

Wir hatten für die ersten drei Punkte die Koordinaten festgelegt:

$$P_{-1}(0,1), \quad P_0(0,0), \quad P_1(t,0)$$

Dabei ist  $t$  ein noch freier Parameter. Wenn wir  $t$  variieren, bewegt sich der Punkt  $P_1$  auf der  $x$ -Achse.

Für den nächsten Punkt  $P_2$  ergeben sich auf Grund der Ähnlichkeitskonstruktion die Koordinaten  $P_2(t, t^2)$ . Wenn wir also den Parameter  $t$  variieren, bewegt sich der Punkt

$P_2$  auf der quadratischen Parabel  $y = x^2$ .

Die Abbildung 4 zeigt die Bahnkurven von  $P_1$  und  $P_2$ .

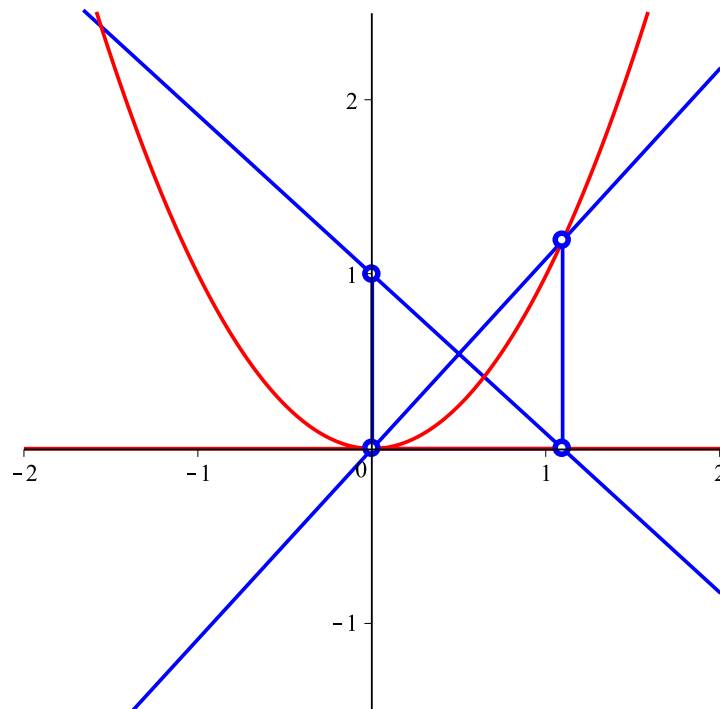


Abb. 4: Die Parabel erscheint

#### 4 Weitere Kurven

Für die nachfolgenden Punkte erhalten wir die Koordinaten:

$$P_3 = (t - t^3, t^2)$$

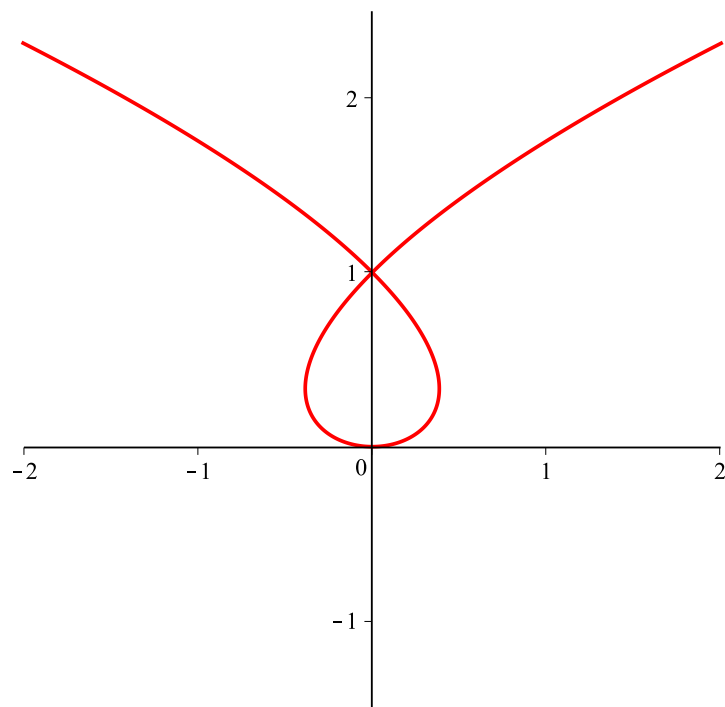
$$P_4 = (t - t^3, t^2 - t^4)$$

$$P_5 = (t - t^3 + t^5, t^2 - t^4)$$

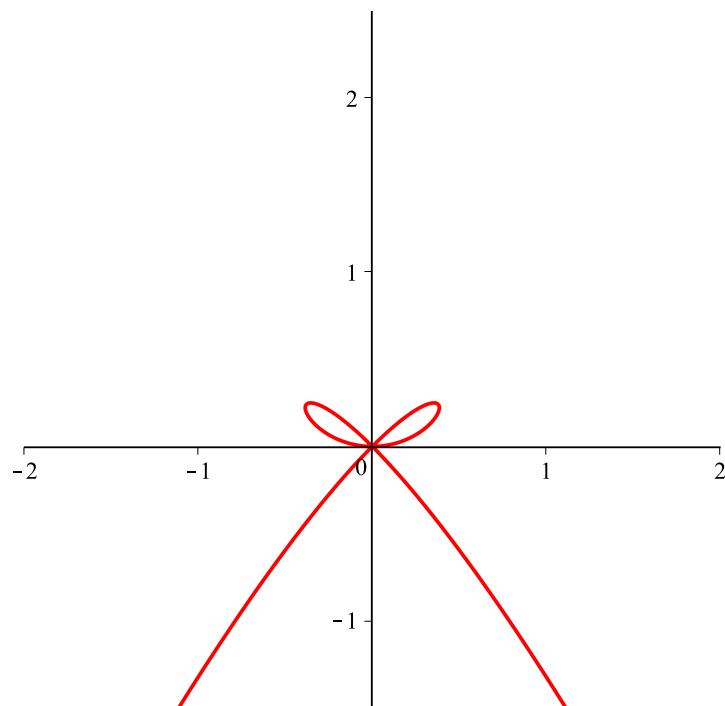
$$P_6 = (t - t^3 + t^5, t^2 - t^4 + t^6)$$

$$P_n = \left( \sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} (-1)^{k-1} t^{2k-1}, \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^{k-1} t^{2k} \right)$$

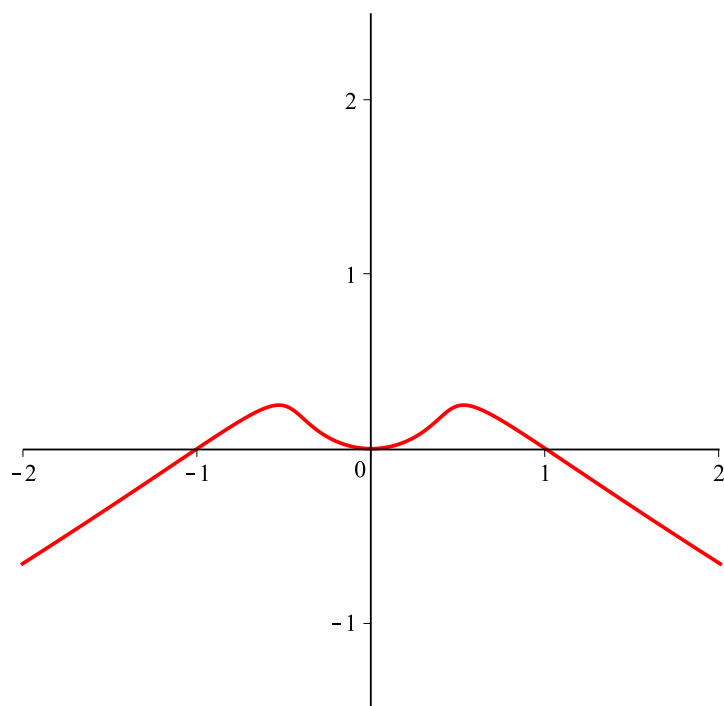
Die folgenden Abbildungen zeigen die zugehörigen Kurven, die sich durch Variation von  $t$  ergeben.



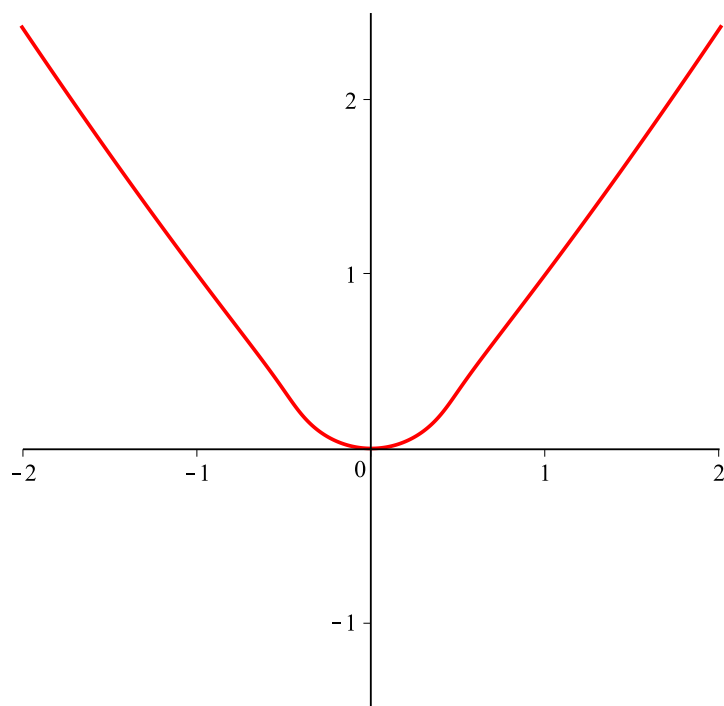
**Abb. 5:  $n = 3$**



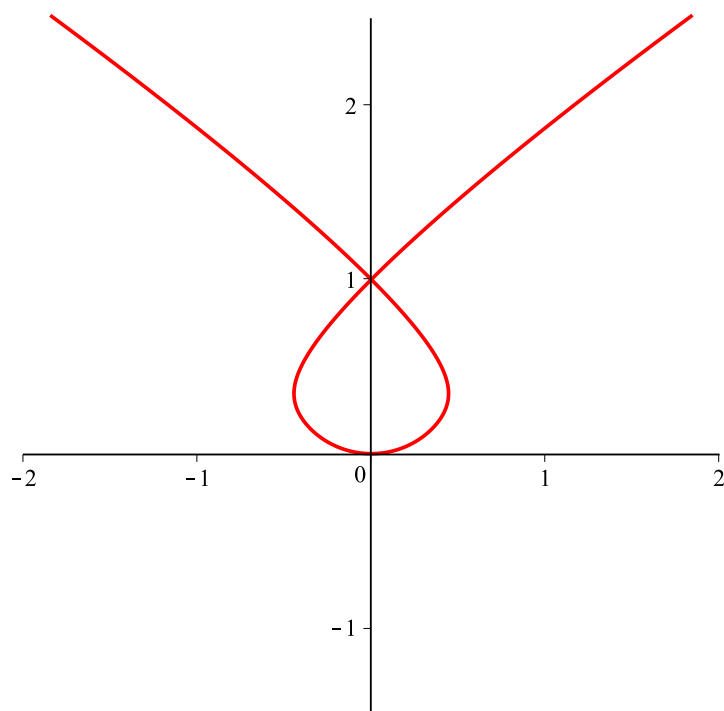
**Abb. 6:  $n = 4$**



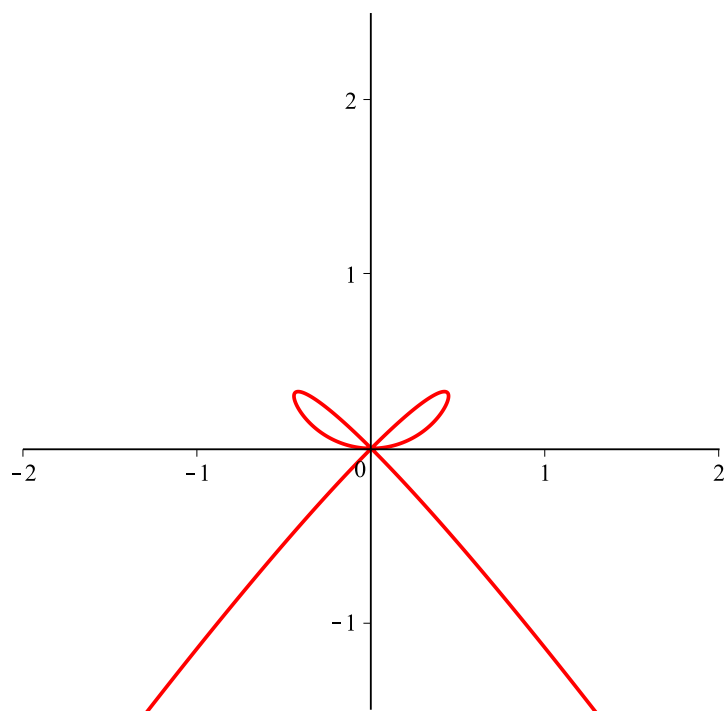
**Abb. 7:  $n = 5$**



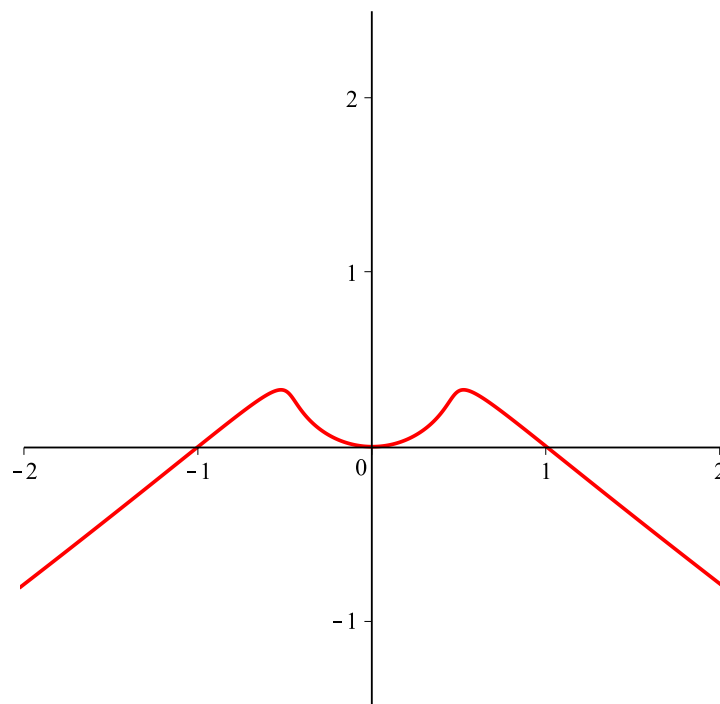
**Abb. 8:  $n = 6$**



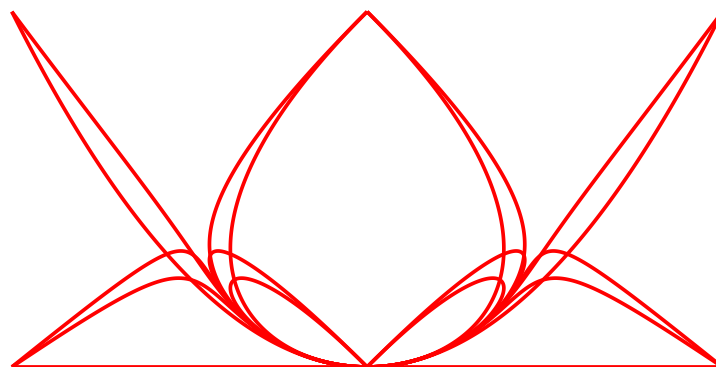
**Abb. 9:  $n = 7$**



**Abb. 10:  $n = 8$**

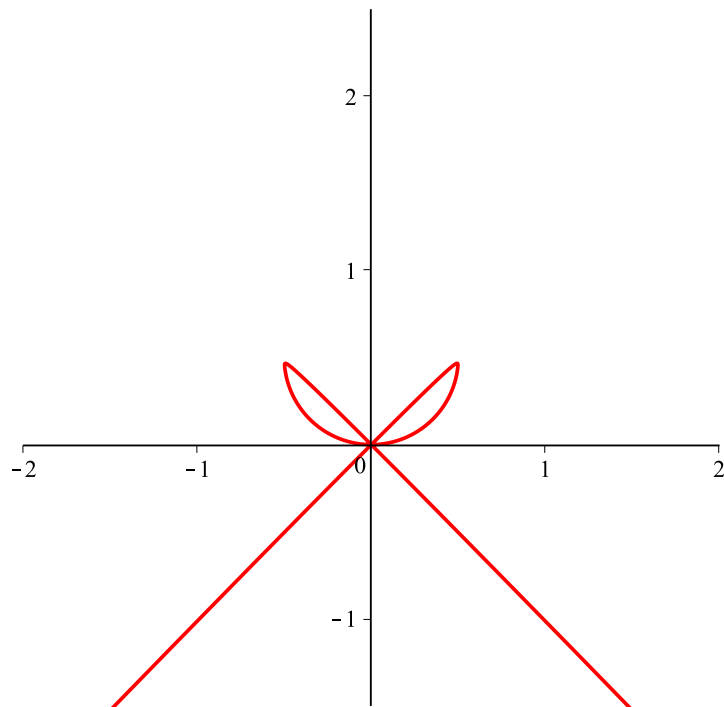
**Abb. 11:  $n = 9$** 

Die Abbildung 12 zeigt eine Überlagerung der Fälle  $n = 0, \dots, 9$  für  $t$  aus dem Intervall  $[-1, 1]$ . Wir sehen, dass sich ein gewisses Grundmuster modulo 4 wiederholt.

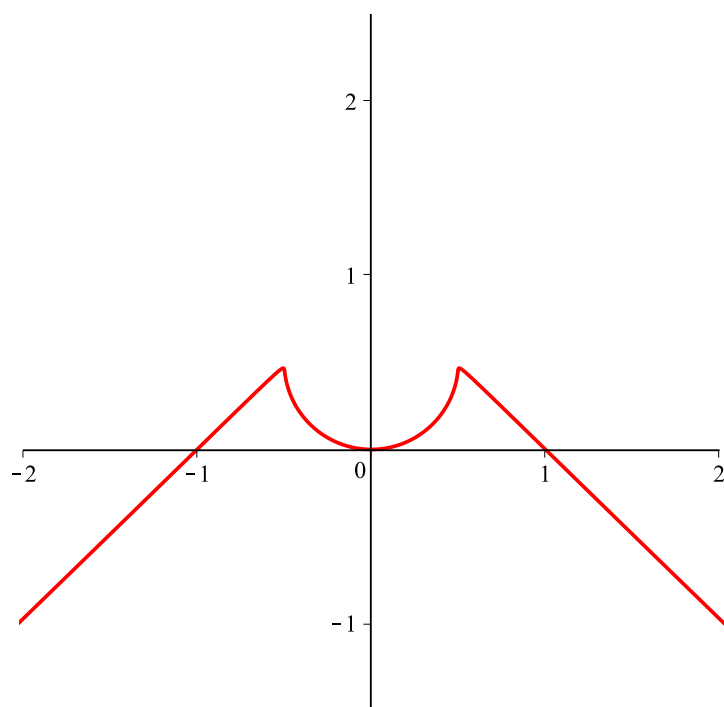
**Abb. 12:  $n = 0, \dots, 9$**



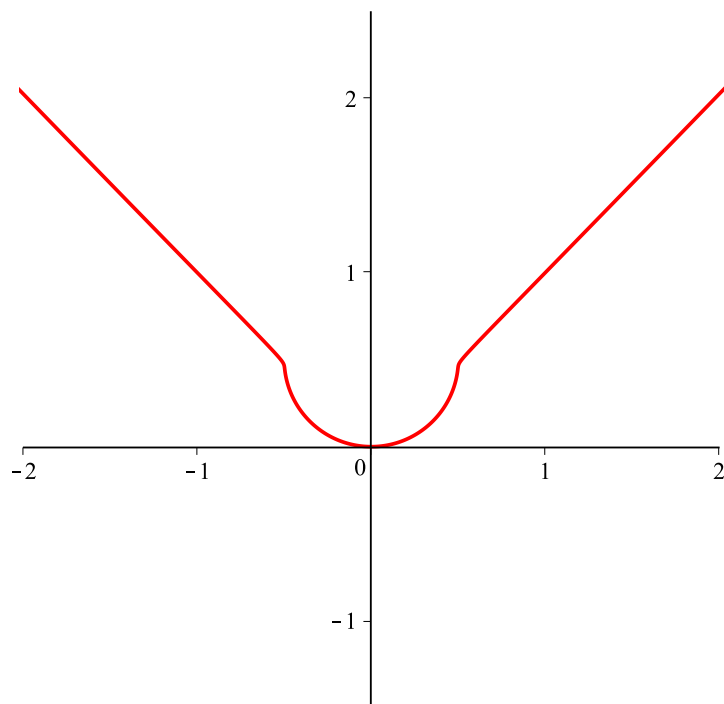
Im Folgenden noch einige größere Werte für  $n$ .



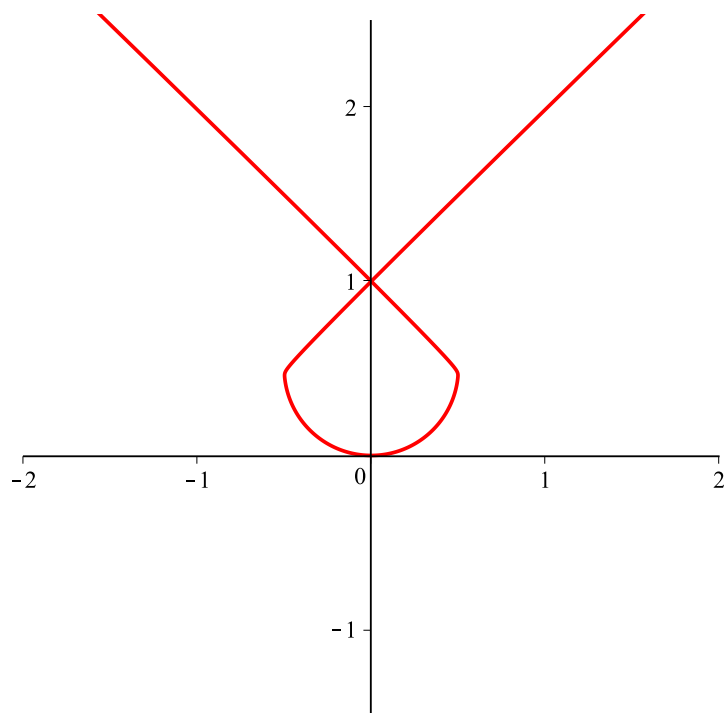
**Abb. 13:  $n = 80$**



**Abb. 14:  $n = 81$**

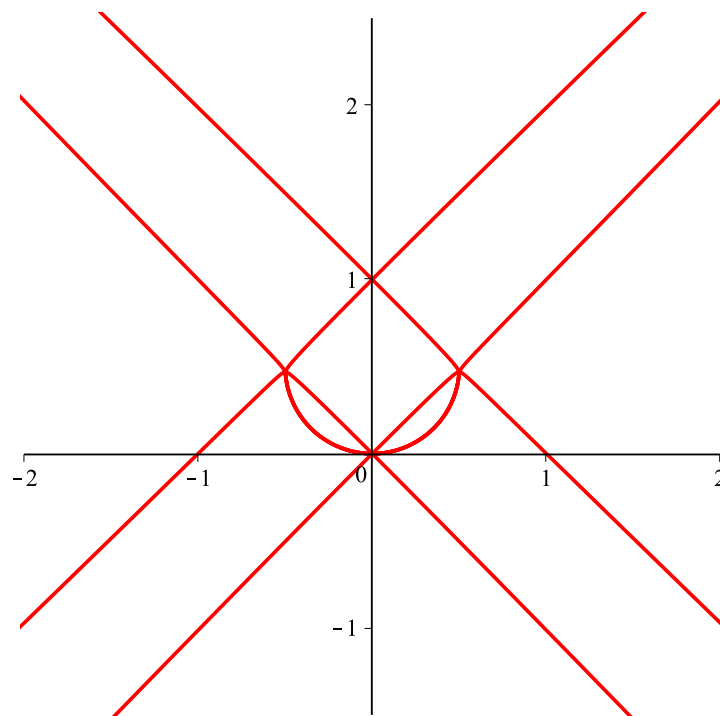


**Abb. 15:  $n = 82$**



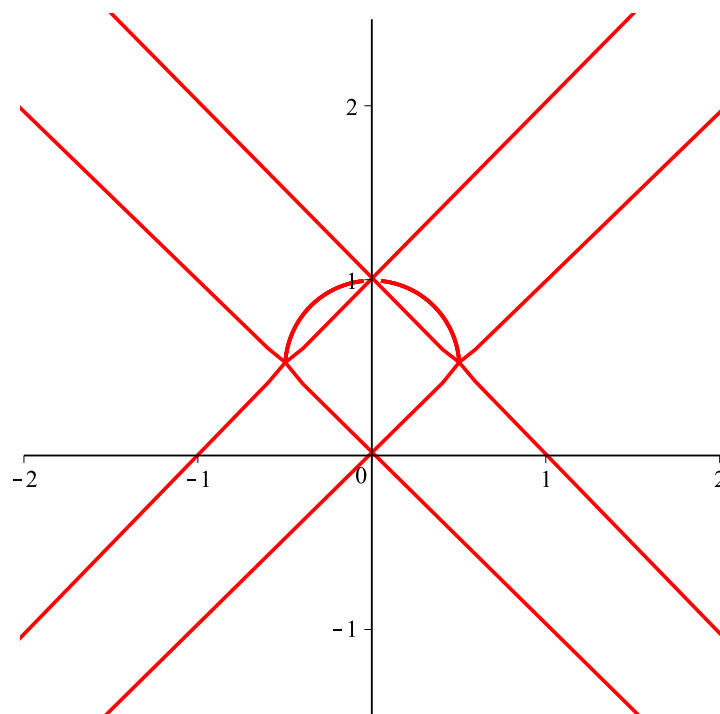
**Abb. 16:  $n = 83$**

Die Abbildung 18 zeigt die Überlagerung der Fälle  $n = 80, \dots, 83$ .



**Abb. 17:  $n = 80, \dots, 83$**

Wo ist der obere Halbkreis geblieben? Die Abbildung 18 zeigt die Situation für  $n = -83, \dots, -80$ .



**Abb. 18:  $n = -83, \dots, -80$**

## **Literatur**

Wynands, Alexander (2014): Mathematische (Basis-)Kompetenzen im Abitur. (Un-)Verzichtbare Mathematik für „Allgemeinbildung“ und Hochschulzugang. GDM-Mitteilungen 96, 2014. S. 19-23.