Hans Walser, [20100701a]

Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten

1 Worum geht es?

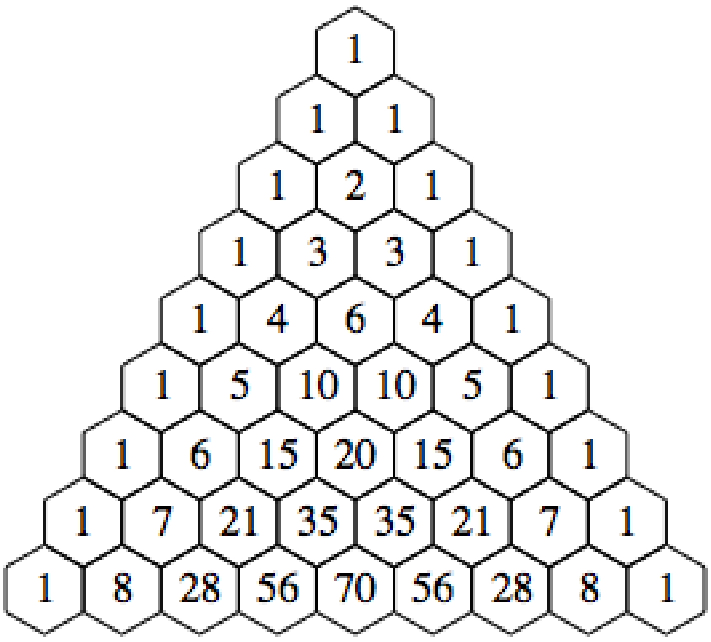
Wir verallgemeinern die für die Binomialkoeffizienten gültige Rekursionsformel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ zu

$$a_{n,k,p,q} = q a_{n-1,n-1,p,q} + p a_{n-1,n,p,q}$$

mit den Randwerten $a_{0,0,p,q} = 1$, $a_{n,k,p,q} = 0$, falls $k < 0$ und $a_{n,k,p,q} = 0$, falls $k > n$ und untersuchen einige Analoga von lieb gewonnenen Eigenschaften des Pascal-Dreieckes der Binomialkoeffizienten.

2 Schreibweisen und Darstellungen

Wir verwenden je nach Bedarf die symmetrische Darstellung der Zahlendreiecke oder die Darstellung mit Linksanschlag, in welcher die Binomialkoeffizienten als Elemente einer (unendlich großen) unteren Dreiecksmatrix erscheinen.



Pascal-Dreieck in symmetrischer Darstellung

Die Matrix des Pascal-Dreieckes der Binomialkoeffizienten bezeichnen wir mit P. Die Matrix mit den Elementen $a_{n,k,p,q}$ bezeichnen wir mit $A_{p,q}$. Es ist $A_{1,1} = P$.

$$P=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&2&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&3&3&1&0&0&0&0&0\\ 1&4&6&4&1&0&0&0&0\\ 1&5&10&10&5&1&0&0&0\\ 1&6&15&20&15&6&1&0&0\\ 1&7&21&35&35&21&7&1&0\\ 1&8&28&56&70&56&28&8&1 \end{pmatrix}$$

Pascal-Dreiecksmatrix

3 Beispiele

3.1 *p* = 2 und *q* = 1

Mit der Rekursion $a_{n,k,2,1}=a_{n-1,n-1,2,1}+2a_{n-1,n,2,1}$ erhalten wir:

$$A_{2,1}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 2&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 4&4&1&0&0&0&0&0&0\\ 8&12&6&1&0&0&0&0&0\\ 16&32&24&8&1&0&0&0&0\\ 32&80&80&40&10&1&0&0&0\\ 64&192&240&160&60&12&1&0&0\\ 128&448&672&560&280&84&14&1&0\\ 256&1024&1792&1792&1120&448&112&16&1 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

Matrizen: Es ist $A_{2,1}=P^2$.

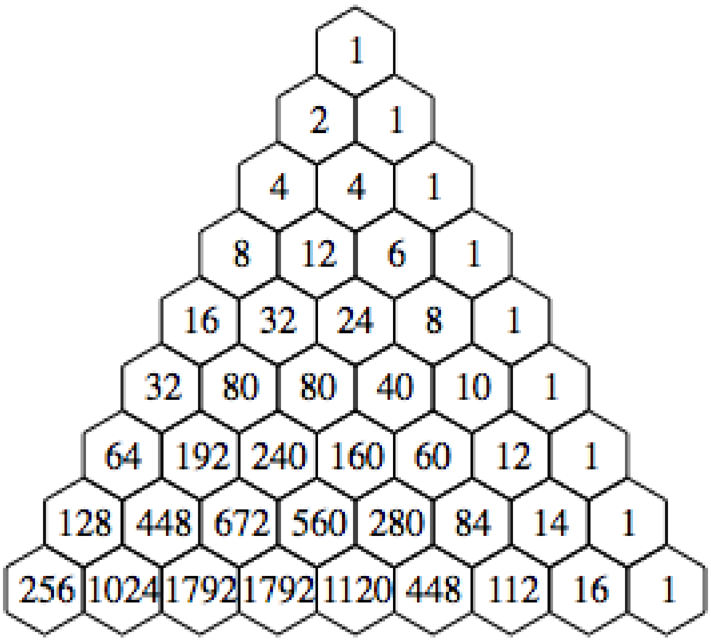
Geometrie: Die Matrix $A_{2,1}$ hat einen geometrischen Querbezug: In der Zeile n (Nummerierung beginnt mit 0) finden wir die Anzahl der Bauelemente des n-dimensionalen Würfels. So hat etwa der dreidimensionale Würfel 8 Ecken, 12 Kanten, 6 Quadrate (als Seitenflächen) und einen 3d-Würfel (sich selber). Der vierdimensionale Würfel hat 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Quadrate, 8 3d-Würfel (als Seitenhyperebenen) und einen 4d-Würfel.

Fibonacci: Wenn wir die Zahlen auf Geraden mit der Steigung 1 addieren, ergibt sich die Zahlenfolge: 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, … . Dies ist eine Folge mit der Rekursion:

$$b_{n,2,1}=2b_{n-1,2,1}+b_{n-2,2,1}$$

Wir haben also eine verallgemeinerte Fibonacci-Folge.

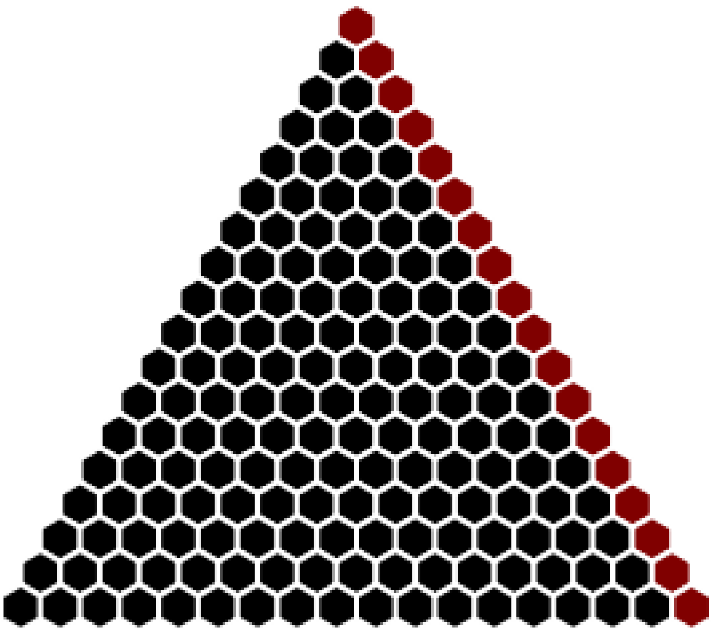
Zeilensumme: Die Dreiecksdarstellung ist, was die Zahlen betrifft, asymmetrisch:



Dreiecksdarstellung

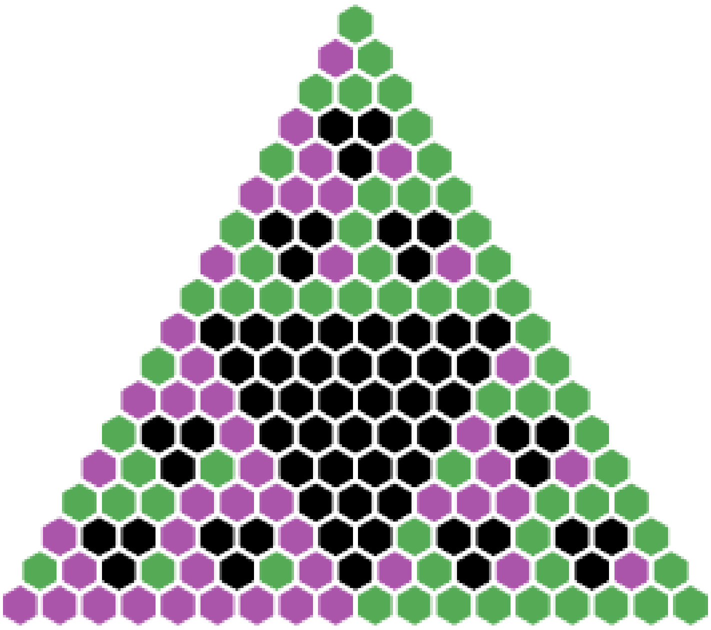
Die Zeilensummen sind der Reihe nach 1, 3, 9, 27, 81, ..., also die Potenzen von 3.

Zahlen modulo m: Mit Ausnahme der Dachschräge rechts sind alle gerade. Das Einfärben modulo 2 bringt also nicht viel.



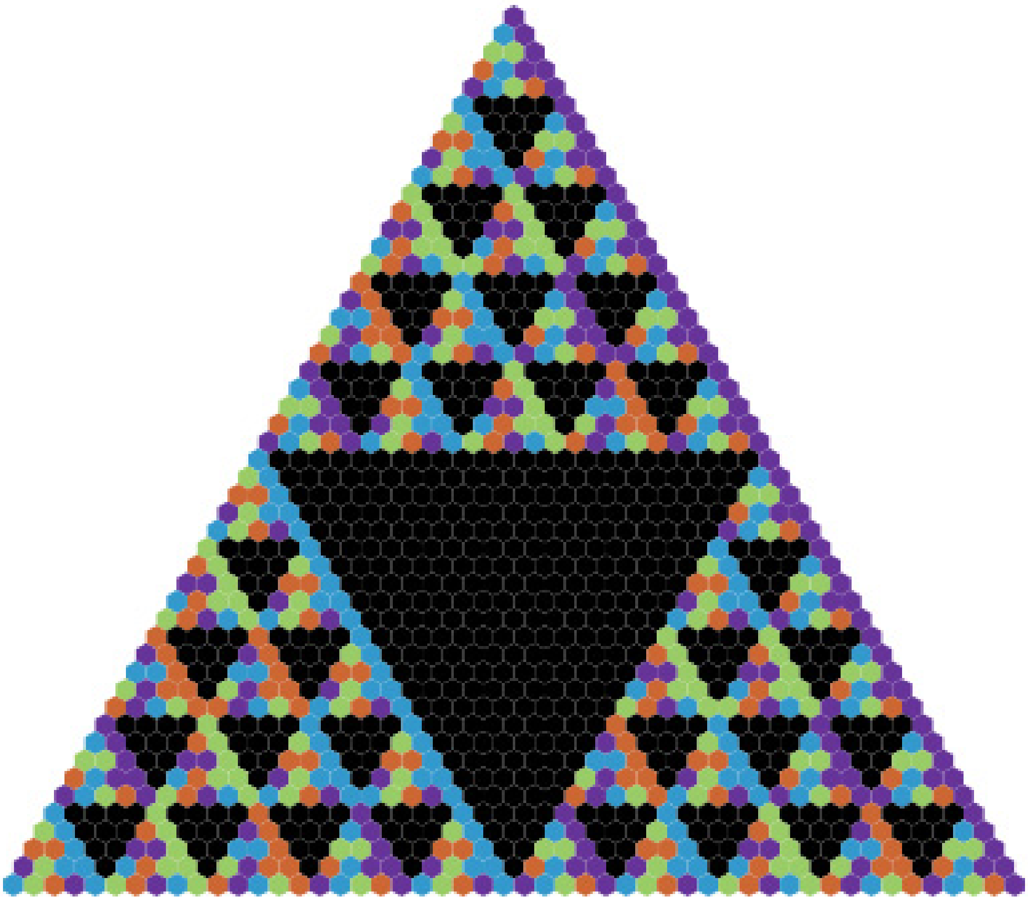
Gerade und ungerade

Für das Einfärben modulo 3 ergibt sich:



Drei Farben

Noch modulo 5:



Fünf Farben

3.2 $p = 1$ und $q = 2$

Mit der Rekursion $a_{n,k,1,2} = a_{n-1,n-1,1,2} + 2a_{n-1,n,1,2}$ erhalten wir eine Dreiecksdarstellung, welche spiegelbildlich zum Fall $p = 2, q = 1$ ist.

1
1 2
1 4 4
1 6 12 8
1 8 24 32 16
1 10 40 80 80 32
1 12 60 160 240 192 64
1 14 84 280 560 672 448 128
1 16 112 448 1120 1792 1792 1024 256

Dreiecksdarstellung

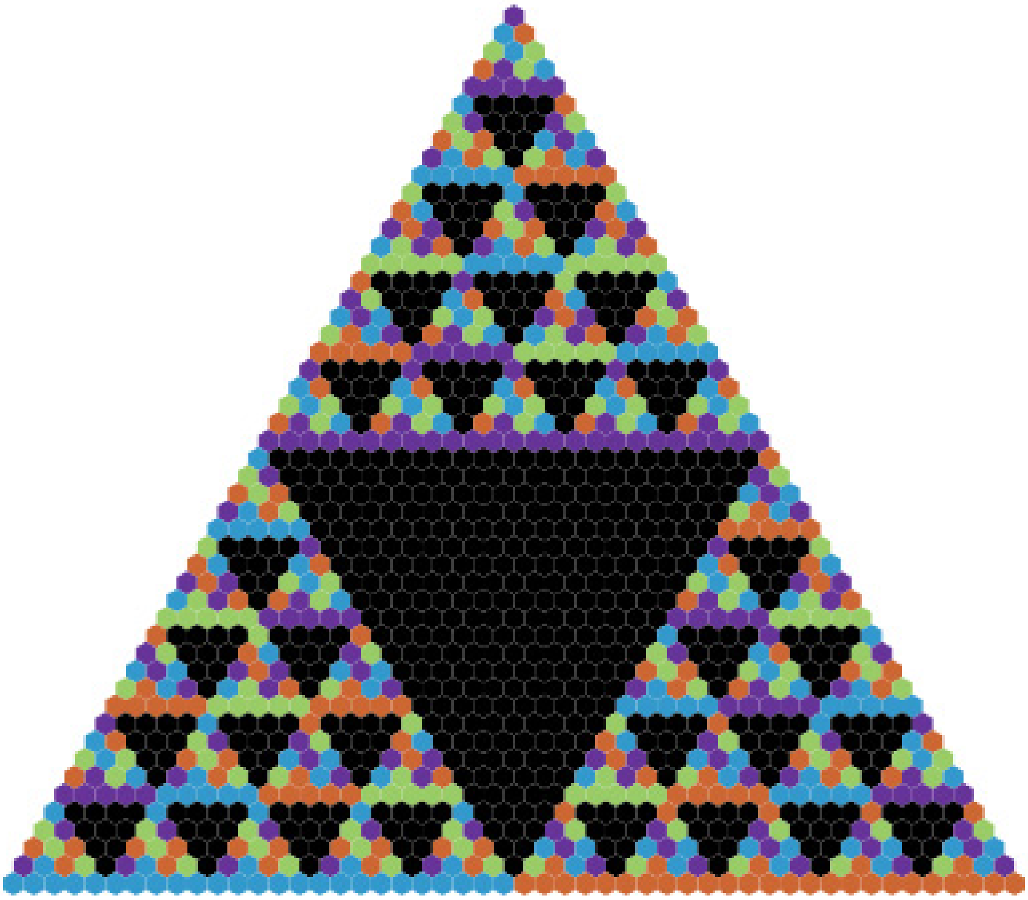
Matrizen: Um einen Link mit der Matrix P zu finden, müssen wir etwas ausholen. Für $p = 0, q = 2$ ergibt sich eine Diagonalmatrix mit den Potenzen zur Basis 2 in der Diagonalen.

$$A_{0,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 \end{pmatrix}$$

Es ist $A_{1,2} = P \cdot A_{0,2}$ (Reihenfolge wesentlich!)

3.3 $p = 2$, $q = 3$

Färbung modulo 5.



Fünf Farben

4 Allgemein

Wir erhalten die Matrix:

$$A_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^2 & 2\cdot p\cdot q & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^3 & 3\cdot p^2\cdot q & 3\cdot p\cdot q^2 & q^3 & 0 & 0 & 0 \\ p^4 & 4\cdot p^3\cdot q & 6\cdot p^2\cdot q^2 & 4\cdot p\cdot q^3 & q^4 & 0 & 0 \\ p^5 & 5\cdot p^4\cdot q & 10\cdot p^3\cdot q^2 & 10\cdot p^2\cdot q^3 & 5\cdot p\cdot q^4 & q^5 & 0 \\ p^6 & 6\cdot p^5\cdot q & 15\cdot p^4\cdot q^2 & 20\cdot p^3\cdot q^3 & 15\cdot p^2\cdot q^4 & 6\cdot p\cdot q^5 & q^6 \end{pmatrix}$$

Es ist also:

$$a_{n,k,p,q} = p^{n-k} q^k \binom{n}{k}$$

Für die Zeilensumme erhalten wir daher $(p+q)^n$.

Matrizen: Es ist $A_{p,1} = P^p$, $A_{1,q} = P \cdot A_{0,q}$ und allgemein:

$$A_{p,q} = P^p \cdot A_{0,q} = A_{p,1} \cdot A_{0,q}$$

Diese Formel ist merkwürdig asymmetrisch.

Fibonacci: Wenn wir die Zahlen auf Geraden mit der Steigung 1 addieren, ergibt sich die Folge:

$$1, \quad p, \quad p^2 + q, \quad p^3 + 2pq, \quad p^4 + 3p^2 q + q^2, \quad p^5 + 4p^3 q + 3pq^2, \quad \ldots$$

Wir erhalten eine verallgemeinerte Fibonacci-Folge mit den Startwerten $b_{1,p,q} = 1$, $b_{2,p,q} = p$ und der Rekursion:

$$b_{n,p,q} = p b_{n-1,p,q} + q b_{n-2,p,q}$$